INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

IRIA DE JESUS DOS REIS BRITO

Das pirâmides do Egipto para a Matemática

Licenciatura em Ensino de Matemática

ISE / 2007

Iria de Jesus dos Reis Brito

Das pirâmides do Egipto para a Matemática

Trabalho científico apresentado no ISE para obtenção do grau de licenciado em Ensino de Matemática, sob orientação da Doutora Natália V. K. Dias Furtado

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Departamento de Ciência & Tecnologia

Trabalho científico:
O Estudo de Pirâmides

Elaborado por:
Iria de Jesus dos Reis Brito

Orientado por:
Doutora Natália V. K. Dias Furtado

Aprovado pelos membros do Júri, homologado pelo conselho científico em ___/___/___.

O Júri

____

____

____

Praia, aos _____de___________________ de 2007

Dedicatória

Aos meus familiares, como prova do meu reconhecimento pelo esforço e dedicação que me prestaram ao longo desses anos de luta, à minha professora e orientadora Doutora Natália Furtado, em reconhecimento da atenção e dedicação na elaboração e execução desse trabalho e ao meu noivo Nilton Gonçalves pelas extraordinárias ajudas ao longo do curso.

De uma forma muito especial ao meu pai, professor padrinho e amigo, Cirilo Garcia Brito por todo amor, sacrifício e carinho a mim dedicado durante toda a sua vida.

"O Homem teme o tempo,

e ainda o tempo teme as pirâmides"

Provérbio árabe

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este trabalho que tem por título “*Das Pirâmides do Egipto para a Matemática*” e por tema “*O Estudo de Pirâmides*” foi elaborado no âmbito da apresentação dum trabalho de fim do curso para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Quem nunca ouviu falar das famosas pirâmides do Egipto? Elas são consideradas como uns dos monumentos mais famosos do mundo e ocupam uma das primeiras posições na lista das sete maravilhas do mundo.

É deixando se levar pelos encantos dessas famosas estruturas monumentais, em sintonia com a Matemática e levando em consideração que poucos aspectos sobre as pirâmides são tratados no ensino básico, secundário e no ensino superior que pensamos e realizamos este trabalho de forma a proporcionar um estudo mais aprofundado nesse tema, contribuindo com conteúdo cognitivo de forma a enriquecer o estudo das pirâmides na Matemática elementar e secundário.

Pretendemos alcançar com ele os seguintes objectivos: abordar o conceito histórico da pirâmide; definir pirâmide; apresentar os seus elementos; determinar esses elementos; apresentar diferentes tipos de pirâmides; construir secções planas de pirâmides; estudar a área da superfície de pirâmide; estudar o volume de pirâmide; analisar o conteúdo programado sobre a pirâmide no ensino primário; analisar o conteúdo programado sobre a pirâmide no ensino secundário; efectuar propostas para o estudo de pirâmides e resolver problemas aplicando os conhecimentos adquiridos.

Ele é constituído por cinco capítulos, ao longo dos quais serão abordados: história das pirâmides do Egipto, o conceito e os tipos de pirâmides, pirâmide truncada, área e volume de pirâmide e propostas para o estudo da pirâmide.

Para esse feito realizamos um conjunto de acções que foram desde uma revisão bibliográfica minuciosa, pesquisas bibliográficas, nomeadamente manuais, programas escolares e a Internet, posteriormente análise das informações recolhidas e propostas de exercícios e problemas sobre o tema, no âmbito da abordagem por competências, sugestões de alterações no programa do ensino básico e secundário para o estudo de pirâmides.

Esperamos alcançar os objectivos propostos. Que este trabalho venha a servir como um instrumento de auxílio para todos àqueles que venham a fazer algum estudo sobre as pirâmides, que ele venha a ser um auxílio para os professores aquando do estudo da pirâmide e uma oportunidade de reflexão sobre as informações fornecidas aos alunos sobre esse tema no ensino básico e secundário e quiçá no ensino superior.

Designações

A -Ponto

(ABC) - Plano definido pelos pontos A, B e C.

AB - Recta que passa pelos pontos A e B.

$[AB]$ - Segmento de recta de extremos A e B.

$\overline{AB}$ - Comprimento de $[AB]$.

$[ABC]$ - Polígono de vértices A, B e C.

V - Vértice da pirâmide.

$[VABC]$ - Pirâmide de vértice V e base $[ABC]$.

h - Altura da pirâmide.

h' - Altura da pirâmide resultante da secção (pirâmide menor).

p - Perímetro da base da pirâmide.

p' - Perímetro da secção.

r - Comprimento do apótema da pirâmide.

a - Comprimento do apótema da base da pirâmide.

l - Comprimento da aresta da base da pirâmide.

A_B - Área da base.

A_B' - Área da secção.

A_l - Área lateral.

A_f - Área de uma face.

A_t - Área total.

V_P - Volume da pirâmide e/ou prisma.

V_T - Volume do tronco da pirâmide.

$\dot{A}B$ - Semi-recta de origem A que passa por B.

$\measuredangle ABC$ -Ângulo de vértice B, lado origem $\dot{A}B$ e extremidade $\dot{B}C$.

$A\hat{B}C$ - Amplitude do $\measuredangle ABC$.

CAPÍTULO I: UMA VISÃO SOBRE AS PIRÂMIDES DO EGIPTO

1.1 OS EGÍPCIOS E A MATEMÁTICA

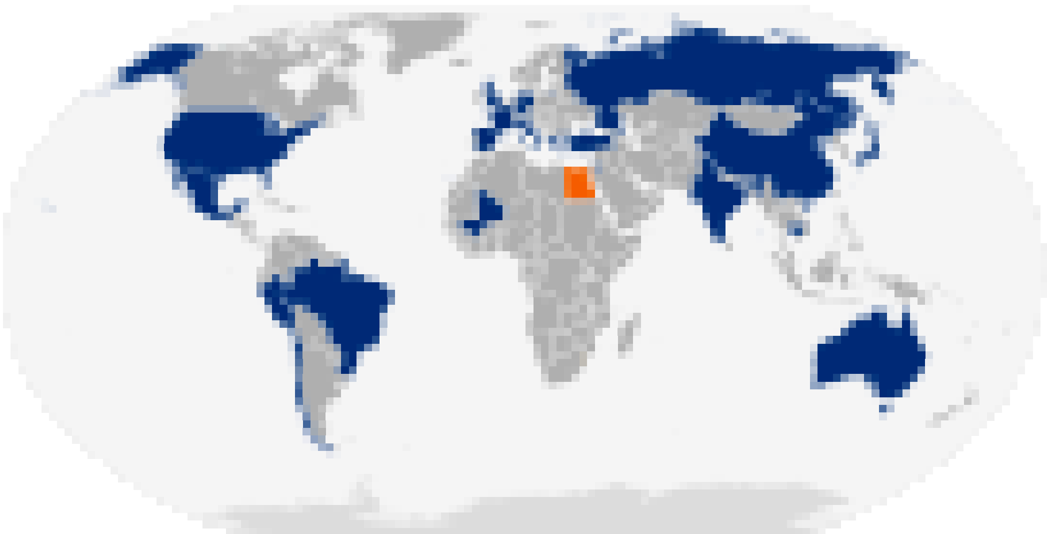


Fig.1

O Egipto é o berço de uma das mais antigas civilizações, a egípcia. Essa civilização desenvolveu-se ao longo de uma extensa faixa de terra fértil que ficava na margem do rio Nilo.

Inicialmente, essa região estava dividida em cidades – estados, "nomos", independentes politicamente. Em torno de 4.000 a.C. esses "nomos" uniram-se em dois reinos: Norte e Sul.

A unificação desses reinos ocorreu por volta de 3.200 a.C., com Menés, que se tornou o primeiro faraó da primeira dinastia, dando-se o início à história da dinastia do Antigo Egipto.

A sociedade egípcia era extremamente rígida. A pirâmide social era fixa e composta da seguinte forma: Faraó (nobreza) – sacerdotes – escribas – camponeses – escravos. Havia uma administração estatal, centralizada no faraó que era o senhor absoluto de tudo que havia no Egipto. Existia também uma poderosa nobreza fundiária que cooperava na administração e na exploração do trabalho dos camponeses.

Apesar da sociedade egípcia ter estado centralizada na pessoa do faraó, houve um grande avanço científico e matemático neste período. O grande progresso registado em vários ramos da matemática, foi devido a necessidade de resolver problemas no período das cheias, fazendo com que a matemática egípcia fosse essencialmente prática. Começou-se, dessa forma, com uma geometria elementar e uma trigonometria básica, utilizando a corda, para facilitar a demarcação das terras. Com isto, procedeu-se a um princípio de cálculo de áreas, raízes quadradas e fracções.

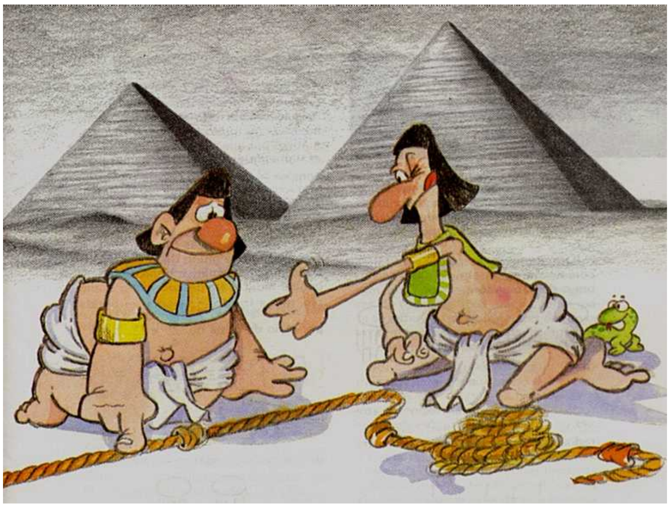


Fig.2

Outras ciências que tiveram avanços significativos neste período foram a Medicina e a Astronomia. Os médicos egípcios possuíam um vasto conhecimento na Medicina (como bem comprovam as múmias de vários faraós descobertas nos dois últimos séculos) e os sacerdotes faziam cálculos astronómicos extraordinários, para determinar quando iriam ocorrer as cheias do Nilo.

Por volta de século XVIII d.C., em escavações no Egipto, foram descobertos vários papiros. De ponto de vista matemático, os mais importantes são os de Moscou e os de Rhind. Estes papiros trazem uma série de problemas e colecções matemáticas em linguagem hieróglifa.

Porém, onde os egípcios mais se destacaram foi na construção de túmulos, de uma forma geral, em honra dos faraós.
Contando com materiais rudimentares, construíram verdadeiros monumentos de arquitectura.


Fig.3

A construção das grandes pirâmides faz supor que o conhecimento matemático dos egípcios era muito mais avançado que o conhecido nos papiros. Talvez o facto da escrita ser muito difícil tenha sido um dos motivos que impediu este registro ou estes registos foram feitos em papiros que não chegaram aos nossos dias.

Pode-se afirmar, que a matemática egípcia foi um dos pilares da matemática grega, a qual foi a base para a nossa matemática moderna, isto em Geometria, Trigonometria e ou mesmo na Astronomia.

1.2 Abordagem histórica do conceito

Até ao final da II dinastia os túmulos dos soberanos e dos nobres egípcios eram constituídos por uma câmara funerária cavada profundamente no solo, sobre a qual se erigia uma estrutura baixa, de paredes verticais, tecto achatado, base rectangular, construída com tijolos de lama cozido ao sol que ficaram conhecidas por mastabas. Tais estruturas evoluíram com o passar dos anos, o material construtivo passou a ser a pedra, as paredes passaram a ser ligeiramente inclinadas formando uma pirâmide truncada. As dimensões aumentaram com o acréscimo de vários andares em degraus, até atingirem a forma piramidal (Fig.3).

Porém, a palavra pirâmide não provém da língua egípcia, ela formou-se a partir do grego "pyra" (que quer dizer fogo, luz e símbolo) e "midos" (que significa medidas).

As pirâmides são estruturas monumentais construídas em pedra. Têm uma base rectangular e quatro faces triangulares que convergem para um vértice.

Para os egípcios, elas representavam os raios do Sol brilhando em direcção à Terra.

Acredita-se que eram edifícios funerários, embora alguns especialistas acreditem que além de servirem de mausoléu eram também templos religiosos. Foram construídas há cerca de 2.700 anos, desde o início do antigo reinado até perto do período ptolemaico. A época em que atingiram o seu apogeu, o período das pirâmides por excelência, começou com a III dinastia e terminou na VI dinastia (2686-2345 a.C.). Todas as pirâmides do Egipto foram construídas na margem Oeste do Nilo, na direcção do sol poente.

Ao falarmos de pirâmides geralmente nos restringimos ao estudo dos três grandes monumentos de Gizé, porque eles são os mais importantes, entretanto, no período de um século que decorreu entre a construção da pirâmide de degraus de Djoser e a de Kéfren, mais de uma dezena de pirâmides foram erguidas. Depois de Miquerinos, por sua vez, inúmeros outros faraós edificaram monumentos piramidais e vários deles, embora em ruínas, ainda podem ser visitados no Egipto.

As três majestosas pirâmides foram construídas como tumbas reais para Quéops (ou Kufu), Quéfren, e Miquerinos (ou Menkaure) – pai, filho e neto. A maior delas tem, aproximadamente, 150 m de altura e todos os quatro lados são praticamente do mesmo comprimento, com uma exactidão não existente apenas por alguns centímetros, é chamada Grande Pirâmide, e foi construída cerca de 2550 a.C. para Kufu, no auge do antigo reinado do Egipto.

A pirâmide de Quéfren, construída a Sudoeste da do seu pai, é ligeiramente mais baixa (136 metros), com uma base de 215,5 metros quadrados, enquanto a pirâmide de Miquerinos, no mesmo alinhamento tem, apenas 62 metros de altura.

Junto à Grande Pirâmide jazem ainda três pequenas pirâmides dedicadas às suas mulheres ou parentes chegados.

Não foram encontrados registros pictóricos ou textuais que expliquem como as pirâmides foram planejadas e construídas. O estudo detalhado dos monumentos e o conhecimento crescente dos meios disponíveis na época tornaram possível determinar muitos detalhes construtivos, entretanto várias questões continuam sem solução

Quem construiu as pirâmides de Gizé era alguém com profundos conhecimentos sobre a Terra, e com uma tecnologia muito avançada. Isso mostra que os antigos egípcios estavam avançados na Matemática e na Engenharia.

Fig.4 (Da esquerda para a direita, pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos).

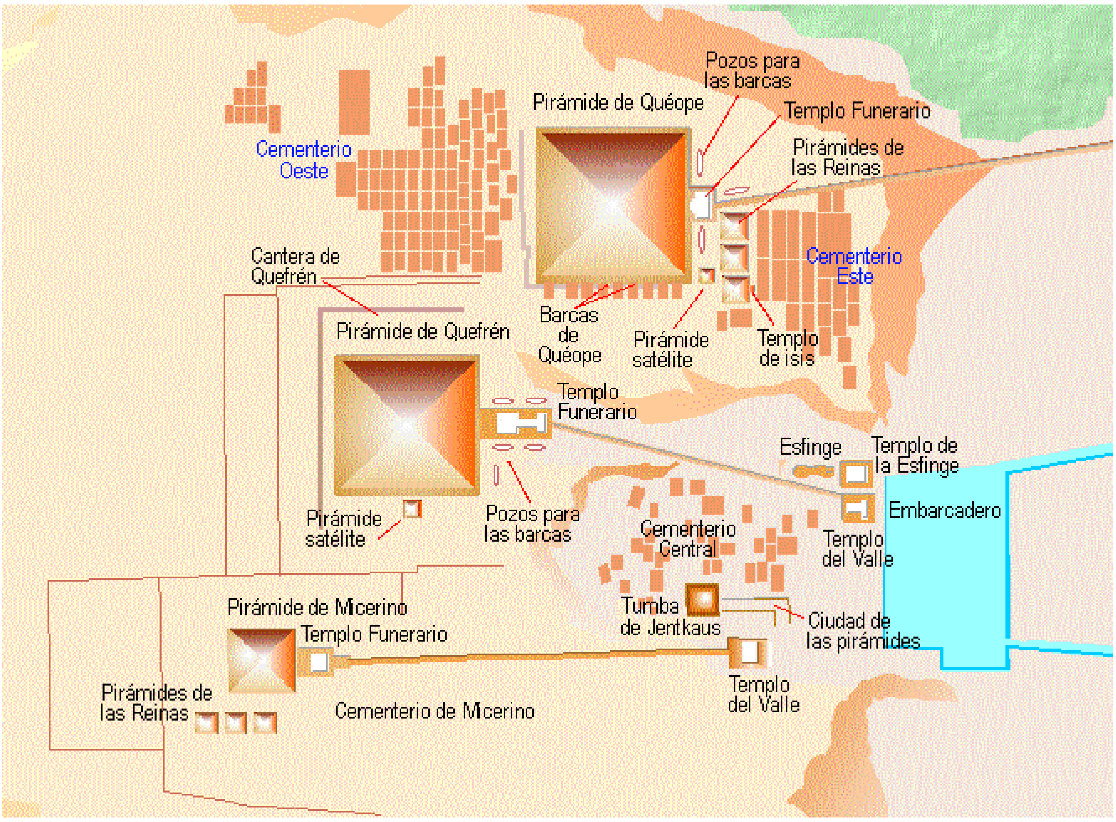


Fig.5 (Esquema das Pirâmides).

A grande diferença entre as Pirâmides de Gizé em relação às outras maravilhas do mundo é que elas ainda persistem, resistindo ao tempo e às intempéries da natureza, encontrando-se em estado de conservação relativamente bom.

1.3 THALES E AS PIRÂMIDES DO EGIPTO

Thales de Mileto foi um grande filósofo, matemático e naturalista considerado "pai da filosofia grega".

Nasceu em Tebas, aproximadamente no ano de 625 a. C. e faleceu em Atenas em 547 a. C., aos 78 anos.

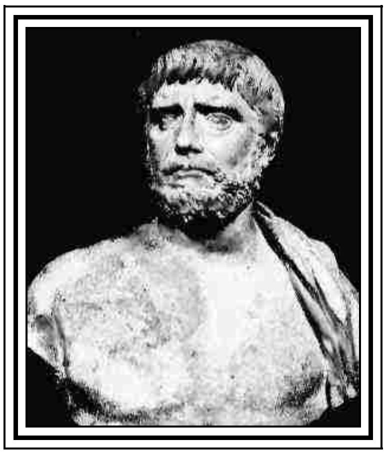


Fig.6 (Thales de Mileto)

Foi numa das suas viagens que visitou o Egipto e entrou em contacto com a comunidade científica – em particular astronómica e geómetra. A sua viagem ao Egipto, no século VI a.C. marcou o início da Geometria Grega.

Um dos seus feitos mais notáveis foi conseguir medir a altura das pirâmides.

Afixou sobre a areia, verticalmente, um bastão de madeira cujo comprimento conhecia e mediu-lhe a sombra. Após medir a sombra da pirâmide, deduziu-lhe a altura, porque sombras e alturas, tanto em pirâmides quanto em bastões, quaisquer que sejam seus tamanhos, são proporcionais.

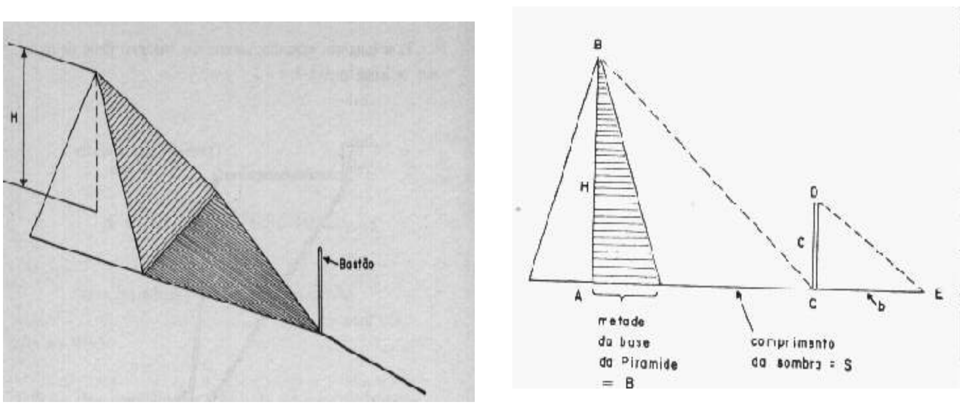
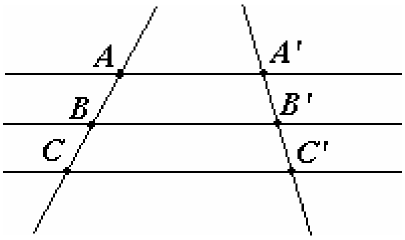


Fig.7

Esta proporcionalidade entre alturas e sombras constitui a essência daquilo que hoje se aprende na escola sob a denominação de *Teorema de Thales*.

O teorema de Thales diz-nos que, se duas rectas são transversais a um feixe de rectas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.



$$\frac{[AB]}{[BC]}=\frac{[A'B']}{[B'C']},\frac{[BC]}{[AC]}=\frac{[B'C']}{[A'C']},\frac{[AB]}{[AC]}=\frac{[A'B']}{[A'C']}$$

Fig.8

Para medir a altura da pirâmide baseou-se em alguns factos:

- Quando dois triângulos têm os ângulos iguais, então seus lados correspondentes formam uma proporção.

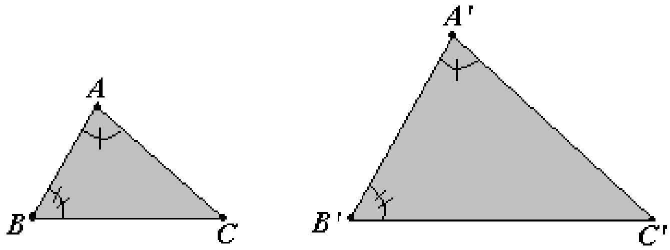


Fig.9
Razão de semelhança

Se o triângulo $[ABC]$ é semelhante ao triângulo $[A'B'C']$ temos: $\frac{[AB]}{[A'B']}=\frac{[AC]}{[A'C']}=\frac{[BC]}{[B'C']}$

- Os raios solares são paralelos – E nesse caso sabia que os ângulos de incidência dos raios solares num mesmo instante tinham todos a mesma amplitude.

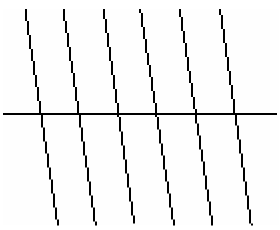


Fig.10

O seu contributo é tão importante que 26 séculos depois os cientistas da NASA ainda avaliam alturas de montanhas na lua e em Marte através de suas respectivas sombras obtidas em fotografias.

CAPÍTULO II: ESTUDO DE PIRÂMIDES

2.1 CONCEITO, ELEMENTOS E TIPOS DE PIRÂMIDES

Definição 1: Chama-se superfície piramidal à superfície gerada por uma recta que passa por um ponto fixo e que move apoiando-se sobre uma linha poligonal fechada. O ponto fixo é o vértice, a recta é a geratriz e a linha poligonal fechada é a directriz da pirâmide.

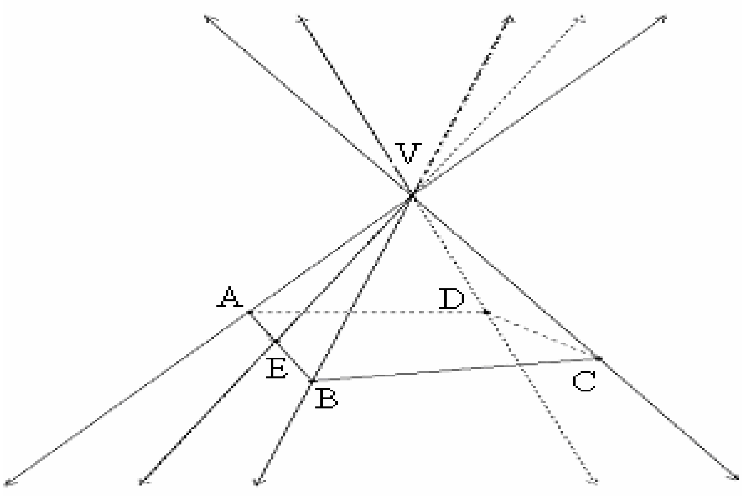


Fig.1

Na Fig.1 está representada uma superfície piramidal cujo vértice é o ponto *V*, a geratriz é a recta *VE* e a directriz é a linha poligonal fechada $[ABCD]$.

A superfície piramidal é dividida pelo vértice em duas partes, que se chamam folhas da superfície piramidal.

Definição 2: Chama-se pirâmide a um poliedro formado por todos os segmentos que unem um ponto dado, o vértice da pirâmide, com os pontos de um polígono, a base da pirâmide, ou seja, consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano, uma pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.

$[VA_1A_2A_3A_4A_5]$ – pirâmide

(n=5)

V – vértice

$[VX]$ – altitude

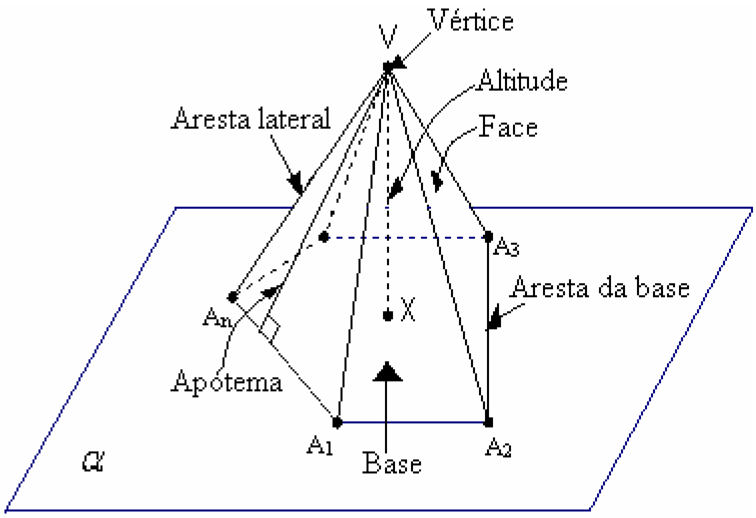


Fig.2

Numa pirâmide podemos identificar os seguintes elementos:

1. **Base**: a base da pirâmide é a região plana poligonal sobre a qual se apoia a pirâmide.
2. **Vértice**: o vértice da pirâmide é o ponto isolado V mais distante da base da pirâmide.
3. **Centro da base da pirâmide**: quando a pirâmide é regular, o centro é o ponto de intercessão das bissectrizes dos ângulos internos do polígono da base.
4. **Eixo**: quando a pirâmide é regular, o eixo da pirâmide é o segmento que une o vértice com centro da base (na Fig.3 b) o eixo está representado pelo segmento $[VA]$).

5. **Altura**: distância que vai do vértice da pirâmide ao plano da base (medida do segmento $[VA] \perp \alpha$ Fig.3 a), b) e c)).
6. **Faces laterais**: são regiões planas, triangulares, que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base.
7. **Arestas laterais**: são segmentos de recta, que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base.
8. **Apótema**: é a altitude de cada face lateral, relativamente à aresta da base.
9. **Superfície lateral**: é a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
10. **Aresta da base**: é qualquer um dos lados do polígono da base.

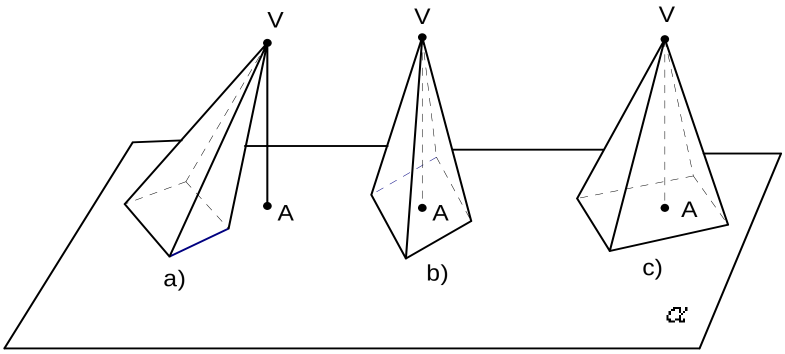


Fig. 3

Definição 3: Chama-se altitude de uma pirâmide ao segmento de recta perpendicular tirado do vértice da pirâmide para a base da mesma, e altura o comprimento de uma altitude.

As pirâmides são designadas de acordo com as bases, isto é, o número de faces condiciona o seu nome.

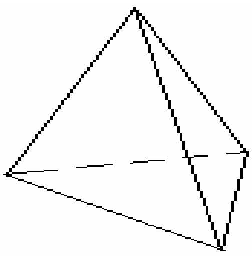
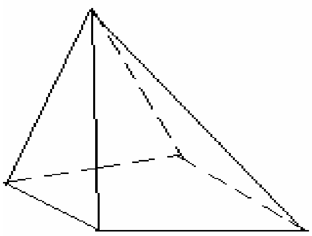
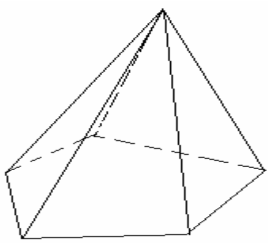
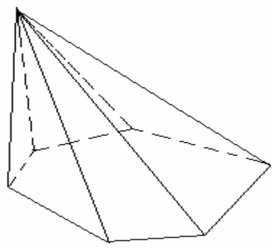
Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal
			
Base: triângulo	Base: quadrilátero	Base: pentágono	Base: hexágono

Fig.4

À pirâmide triangular cuja base e as faces são triângulos equiláteros geometricamente iguais em que o mesmo número de arestas converge para todos os vértices, designa-se por tetraedro.

Notemos que todas as quatro faces de um tetraedro são de direitos iguais, quer dizer, qualquer delas pode servir como base.

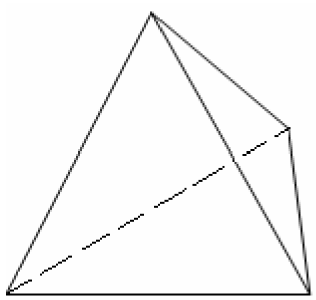


Fig.5 – Tetraedro

Definição 4: Pirâmide regular é aquela cuja base é um polígono regular, as faces são triângulos isósceles congruentes e a projecção ortogonal do vértice *V* sobre o plano da base coincide com o seu centro, isto é, a perpendicular ao plano da base tirada pelo vértice da pirâmide intersecta a base no seu centro.

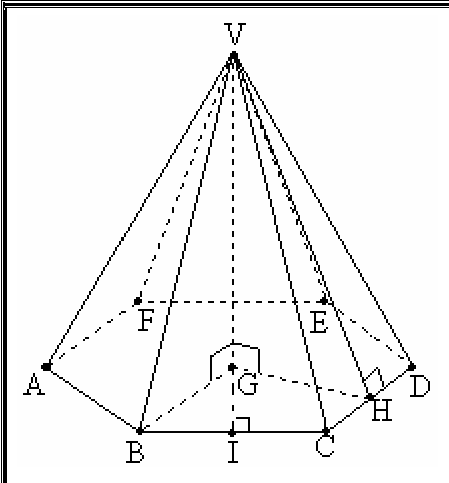
	$[GB]$	Raio da circunferência circunscrita
	$[GH]$	Raio da circunferência inscrita
	$[BC]$	Aresta da base
	$[VH]$	Apótema de uma face lateral
	$[VG]$	Altitude da pirâmide
	$[VC]$	Aresta lateral
	$[GI]$	Apótema da base
As faces laterais são triângulos isósceles congruentes		

Fig.6

Definição 5: Chama-se apótema de uma pirâmide regular à altitude de qualquer das faces laterais, relativamente à aresta da base.

Definição 6: Chama-se apótema da base de uma pirâmide regular ao segmento de recta que une o centro desse polígono com o ponto médio de qualquer um dos lados do polígono.

Propriedades:

1. Tendo em conta que a base de uma pirâmide regular é um polígono regular, os vértices da base estão equidistantes do centro.
2. O cento da pirâmide regular coincide com o centro da circunferência inscrita no polígono da base e circunscrita a esse polígono.
3. O eixo da pirâmide regular é perpendicular a base, uma vez que, o vértice da pirâmide se projecta no centro da base.
4. As arestas laterais de uma pirâmide regular são iguais, visto terem os traços igualmente afastados do pé da perpendicular.
5. As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes, porque têm os três lados, respectivamente, iguais.
6. A apótema da base coincide com o raio da circunferência inscrita na mesma.
7. A apótema da base é sempre perpendicular ao lado do polígono.

2.2 Construção de pirâmide e das suas secções planas

Em conformidade com as regras da projecção paralela a imagem /representação da pirâmide constrói-se da seguinte maneira.

Em primeiro lugar constrói-se a base, que será um polígono plano, de seguida marca-se o vértice da pirâmide e une-se com os vértices da base por meio das arestas laterais, como mostra a Fig.7.

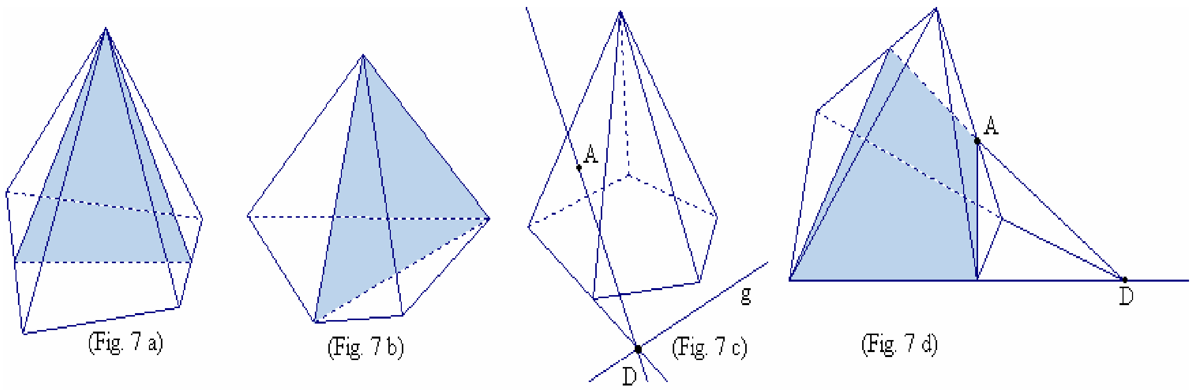


Fig.7

As secções planas da pirâmide, que passam por vértice, são triângulos.

A secção plana da pirâmide dada por meio de traço *g* no plano da base constrói-se tal, como a secção do prisma[1].

Para construção da secção da pirâmide por meio de um plano basta construir a intersecção das suas faces laterais com o plano secante.

Se numa face não paralela ao traço *g* está marcado um ponto *A*, pertencente a secção, então, em primeiro lugar constrói-se a intersecção do traço g, do plano secante, com o plano desta face – o ponto *D* (Fig.7 c). Une-se o ponto *D* com o ponto *A* por uma recta. O segmento dessa recta que pertence a face mão é paralela ao traço g, então o plano secante intersecta essa face pelo segmento. Passando a face lateral, vizinha constrói a sua intersecção com o plano secante e etc. Obtém-se a secção pretendida.

Na (Fig.7 d) está construída a secção da pirâmide quadrangular pelo plano que passa por uma aresta da base e ponto A situada numa das suas arestas laterais.

2.3 Secção transversal de uma pirâmide

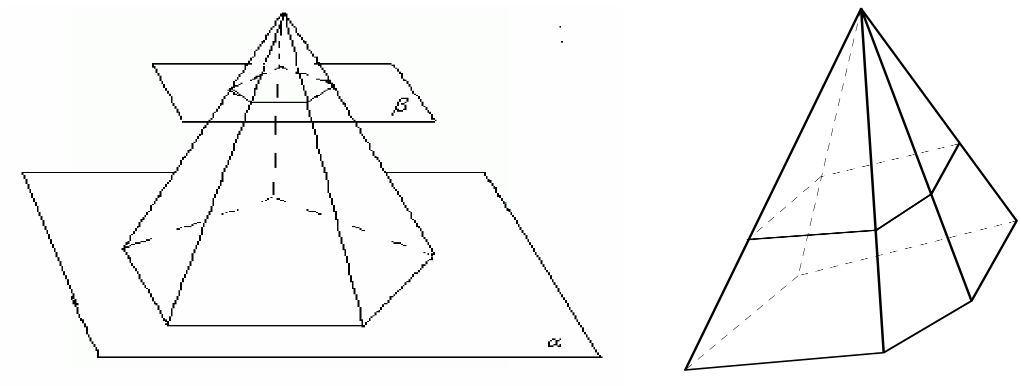


Fig.8

Secção transversal de uma pirâmide é a intersecção da pirâmide com um plano paralelo à base da mesma. A secção transversal tem a mesma forma que a base, isto é, as suas arestas correspondentes são proporcionais.

---

[1] Ver o trabalho de fim do curso de António Barradas dos Santos Freire " Estudo de secções planas de sólidos geométricos", pg. 37 - 46.

Tendo em conta que os lados correspondentes da secção e da base são segmentos de paralelas, podemos enunciar as seguintes **propriedades** sobre secções transversais:

1ª. Em uma pirâmide qualquer, a secção transversal e a base são polígonos semelhantes.

2ª. As arestas laterais da pirâmide são divididas em segmentos proporcionais.

Teorema 1: Se uma pirâmide é intersectada por um plano paralelo à base, as arestas laterais e o segmento correspondente à altura são divididos em segmentos proporcionais.

Hipótese: $[A'B'C']$ é a secção feita numa pirâmide triangular por um plano paralelo à base $[ABC]$ e $[VP]\perp$ à base.

Tese: $\frac{[VP]}{[VP']}=\frac{[VA]}{[VA']}=\frac{[VB]}{[VB']}=\frac{[VC]}{[VC']}$

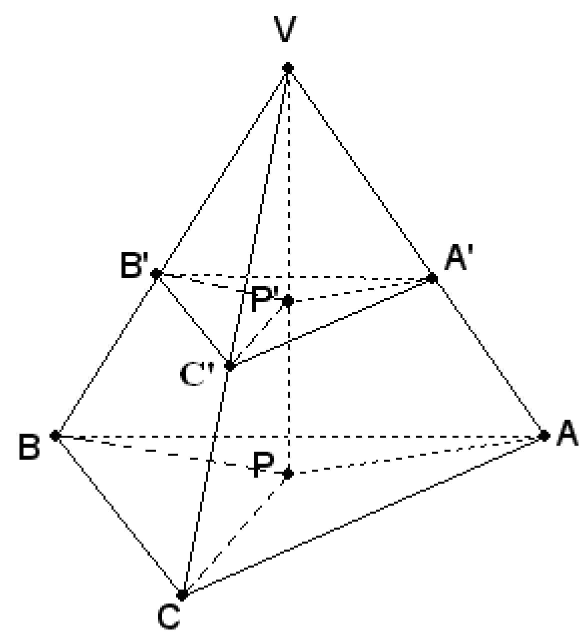


Fig.9

Demonstração

Tendo em conta que $PA \parallel P'A'$, $BP \parallel B'P'$ e $CP \parallel C'P'$, e que $[VP]$ é perpendicular à base e à secção podemos estabelecer uma relação de semelhança tal que:

$\frac{[VP]}{[VP']}=\frac{[VA]}{[VA']}$, $\frac{[VP]}{[VP']}=\frac{[VB]}{[VB']}$ e $\frac{[VP]}{[VP']}=\frac{[VC]}{[VC']}$, logo $\frac{[VP]}{[VP']}=\frac{[VA]}{[VA']}=\frac{[VB]}{[VB']}=\frac{[VC]}{[VC']}$

Teorema 2: Se uma pirâmide é intersectada por um plano paralelo à base, a razão entre os perímetros da base e da secção é igual a razão das distâncias do vértice à base e à secção.

Hipótese: $[A'B'C']$ é a secção feita por um plano paralelo à base $[ABC]$ de uma pirâmide, p e p' são os perímetros da base e da secção transversal, $[VP]$ é perpendicular à base, $\overline{VP} = h$ e $\overline{VP'} = h'$.

Tese: $\frac{p}{p'} = \frac{h}{h'}$

Demonstração

Como $A'C' \parallel AC$, tem-se $\frac{[VA]}{[VA']} = \frac{[AC]}{[A'C']}$ e pela 2ª propriedade $[ABC] \sim [A'B'C']$, então conclui-se que $\frac{p}{p'} = \frac{[AC]}{[A'C']}$ e pelo teorema anterior $\frac{h}{h'} = \frac{[VA]}{[VA']}$, portanto $\frac{p}{p'} = \frac{h}{h'}$.

Corolário I: Se uma pirâmide for intersectada por um plano paralelo à base, a razão entre as áreas da base e da secção (A_B e A_B' respectivamente) será igual ao quadrado da razão das distâncias do vértice à base e à secção.

Atendendo ao teorema anterior $\frac{A_B}{A_B'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$

Corolários II: Se duas pirâmides que têm bases equivalentes[2] e mesma altura são intersectadas por planos paralelos às bases e a mesma distância dos vértices, as secções são equivalentes.

Seja A_B a área comum das bases das pirâmides, h a sua altura igual e h' a distância dos planos secantes aos vértices. Representando por A_B' e A_B'' as áreas das secções, pelo corolário anterior $\frac{A_B}{A_B'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ e $\frac{A_B}{A_B''} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ donde $\frac{A_B}{A_B'} = \frac{A_B}{A_B''}$, então $A_B' = A_B''$.

Teorema 3: A secção transversal de uma pirâmide origina uma pirâmide semelhante à pirâmide seccionada.

Hipótese: $[A'B'C']$ é a secção feita por um plano paralelo à base $[ABC]$de uma pirâmide.

Tese: $[VA'B'C']$ é semelhante a $[VABC]$

[2] Dois polígonos dizem-se equivalentes se tiverem mesma área.

Demonstração

Sabendo pela 1ª propriedade que as duas bases são semelhantes (os lados dos polígonos são semelhantes) $[C'A'] \| [CA]$, pois estão contidos em planos paralelos (o da secção e o da base). $[AV]$ e $[CV]$ são transversais a $C'A'$ e CA, pelo que $\measuredangle VA'C' = \measuredangle VAC$ e $\measuredangle A'C'V = \measuredangle ACV$, então cada face lateral da pirâmide menor é semelhante à respectiva face lateral da pirâmide maior pelo critério de semelhança de triângulos AA[3] e, pelo teorema 1, as alturas são proporcionais, logo as pirâmides são semelhantes.

2.4 PIRÂMIDE TRUNCADA

Definição 7: Chama-se pirâmide truncada ou tronco de pirâmide à porção do espaço compreendida entre a base da pirâmide e o plano que corta todas as arestas laterais (Fig.10 a) e b)).

Se a secção plana for paralela à base da pirâmide, obtém-se o tronco de pirâmide de bases paralelas (Fig. 10 b)).

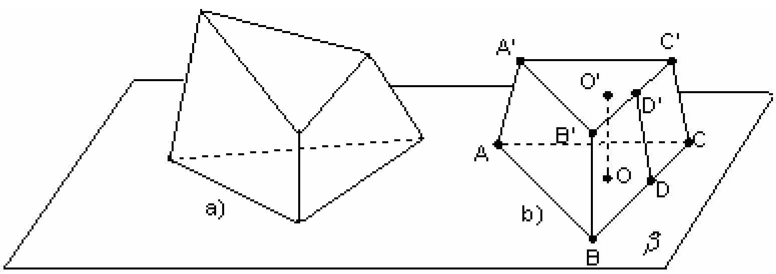


Fig.10

O tronco de uma pirâmide recebe o nome da pirâmide que esteve na sua origem.

O tronco tem duas bases, sendo uma delas a base da pirâmide que lhe originou e a outra a secção originada.

As faces laterais e as arestas laterais do tronco são, respectivamente, as poções de plano e de recta compreendidas entre as bases do tronco.

[3] **Teorema (Critério de semelhança AA˜):** Se dois ângulos de um triângulo são congruentes com dois ângulos homólogos do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

Definição 8: Um tronco de pirâmide de bases paralelas diz-se regular quando a pirâmide a partir da qual se obteve o tronco é regular.

Propriedades:

1. A altura de um tronco de pirâmide de bases paralelas é a distância entre as suas bases. Se o tronco for regular a altura pode ser dada pela distância entre os centros da base.
2. O apótema de um tronco de pirâmide regular é a altitude de qualquer das suas faces laterais. Na Fig.10 b), $[OO']$ é o segmento correspondente a altitude do tronco e $[DD']$ o apótema.
3. No tronco de bases paralelas as faces laterais são trapézios[4] (as arestas das duas bases na mesma face são paralelas). Se o tronco for regular, as faces laterais serão trapézios isósceles[5] iguais.
4. As bases são polígonos semelhantes e nos troncos regulares são polígonos regulares.

[4] Quadriláteros com dois lados paralelos.
[5] Ângulos da base são iguais.

CAPÍTULO III: ÁREA DA SUPERFÍCIE DE PIRÂMIDE E DE PIRÂMIDE TRUNCADA

Atendendo à planificação podemos ver que a área de uma pirâmide não é mais do que a soma da área lateral com a área da base.

Definição 9: A área lateral de uma pirâmide cuja base tem *n* lados, é dado como a soma das áreas de cada uma das faces laterais (triângulos).

Se considerarmos uma pirâmide regular cuja base tem *n* lados e designarmos por A_f a área de uma face lateral da pirâmide, então a soma das áreas das faces laterais recebe o nome de área lateral da pirâmide e pode ser obtida pela fórmula $A_l = n \bullet A_f$.

Teorema 4: A área lateral de uma pirâmide regular é igual a metade do perímetro da base pela medida do apótema.

Hipótese: Uma pirâmide regular tem a área lateral igual a A_l, apótema de medida *r* e perímetro da base *p*.

Tese: $A_l = \frac{p}{2} \bullet r$.

Demonstração

Supondo que a pirâmide tenha n faces laterais, sendo l a medida de uma das arestas da base. $A_l = n \bullet A_f$, sendo a face um triângulo e r a sua altura, então $A_l = n \bullet \frac{l \bullet r}{2}$, como $p = n \bullet l$ vem: $A_l = \frac{p}{2} \bullet r$.

Definição 10: A área total de uma pirâmide é a soma da área da base com a área lateral, isto é, $A_t = A_l + A_B$.

Teorema 5: A área total de uma pirâmide regular é igual a metade do perímetro da base pela soma das medidas dos apótemas da pirâmide e da base.

Hipótese: Uma pirâmide regular tem área total igual a A_t, apótema da pirâmide de medida r, apótema da base a, aresta da base de medida l e área da base igual a A_B.

Tese: $A_t = \frac{p}{2} \bullet (r + a)$

Demonstração

Pela definição $A_t = A_l + A_B$, pelo teorema anterior $A_l = \frac{p}{2} \bullet r$. A base é um polígono regular, que pode ser decomposto em n triângulos cujas alturas são iguais à apótema da base a tal que, $A_\triangle = \frac{l \bullet a}{2}$. Assim sendo $A_B = n \frac{l \bullet a}{2} \Leftrightarrow A_B = \frac{p}{2} \bullet a$. Aplicando a definição vem que $A_t = \frac{p}{2} \bullet r + \frac{p}{2} \bullet a \Leftrightarrow A_t = \frac{p}{2} \bullet (r + a)$.

Teorema 6: A área lateral de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas é igual ao produto da semi-soma dos perímetros das bases pela medida do apótema do tronco.

Hipótese: Um tronco de pirâmide regular de bases paralelas tem a área lateral A_l, apótema de medida r e perímetros das bases p e p'.

Tese: $A_l = \frac{p + p'}{2} \bullet r$.

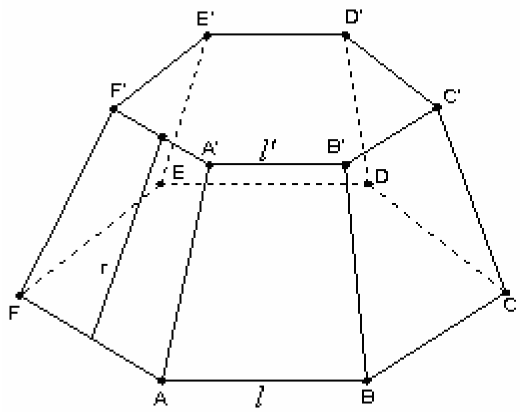


Fig.1

Demonstração

Supondo que o tronco de pirâmide tenha n faces laterais, sendo l e l', respectivamente, as medidas da base maior e da base menor de qualquer uma das faces.

Sabendo que $A_l = n \bullet A_f$ e que cada face é um trapézio com os lados paralelos de medidas l e l'.

$A_l = n \bullet \dfrac{l + l'}{2} \bullet r$ [6] ou $A_l = \dfrac{n \bullet l + n \bullet l'}{2} \bullet r$, tendo em conta que $p = n \bullet l$ e $p' = n \bullet l'$ vem: $A_l = \dfrac{p + p'}{2} \bullet r$.

---

[6] **Teorema:** A área de um trapézio de bases a e b e altura h é igual a semi soma do comprimento da base por h, isto é, $A\ (trapézio) = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) \times h$.

CAPÍTULO IV: VOLUME DE PIRÂMIDE

4.1 PRISMA E TRONCO DE PRISMA

Sabemos que um sólido ocupa certa porção do espaço, isto é, tem um certo volume.

Assim sendo, volume de um sólido é a extensão da porção limitada do espaço que ele ocupa, então medir ou calcular o volume de um sólido é determinar o número que exprime a poção do espaço que ele ocupa.

A unidade que se utiliza para medir volumes é o volume de um cubo de aresta igual a unidade.

Dois sólidos com o mesmo volume, independentemente da forma, dizem-se equivalentes.

Dois sólidos que coincidem dizem-se iguais, isto é, quando deslocando um deles pode fazer-se coincidir com o outro.

Teorema7: Dois prismas rectos[7] que têm bases e alturas iguais são iguais.

Hipótese: Os prismas rectos $[ABCDEF]$ e $[A'B'C'D'E'F']$ têm por bases $[ABC]$ e $[A'B'C']$ que são iguais e as alturas dos prismas são iguais.

Tese: Prisma $[ABCDEF]=$ Prima $[A'B'C'D'E'F']$.

[7] Prisma recto é aquele em que as arestas laterais são perpendiculares às bases.

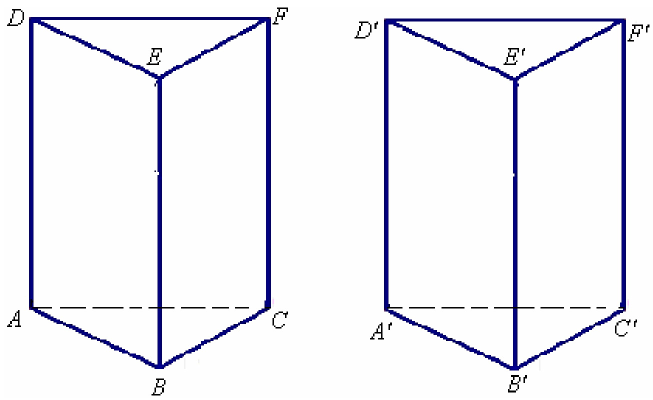


Fig.1

Demonstração

$[AD],[BE]$ e $[CF]$ são perpendiculares à base $[ABC]$; $[A'D'],[B'E']$ e $[C'F']$ são perpendiculares à base $[A'B'C']$.

Levando em consideração que as bases de um prisma são secções feitas num espaço prismático por planos paralelos e que as arestas laterais são segmentos paralelos podemos considerar que as arestas laterais de um prisma são segmentos iguais, assim:

$[AD]=[BE]=[CF]$ e $[A'D']=[B'E']=[C'F']$ .Sabendo que a altura de um prisma é a distância entre os planos das suas bases e pela hipótese que as alturas dos prismas são iguais, então $[AD]=[A'D']$, $[BE]=[B'E']$ e $[CF]=[C'F']$.

Deslocando o prisma $[A'B'C'D'E'F']$ e sobrepondo $[A'B'C']$ a $[ABC]$, $[A'D']$ sobrepõe-se a $[AD]$, $[B'E']$ a $[BE]$ e $[C'F']$ a $[CF]$.

Como $[D'E'F']$ se sobrepõe a $[DEF]$, conclui-se que $[ABCDEF]=[A'B'C'D'E'F']$.

Teorema 8: São iguais dois troncos de prismas rectos que têm bases iguais e arestas laterais correspondentes iguais, uma a uma.

Hipótese: Os troncos de prismas rectos[8] $[ABCDEF]$ e $[A'B'C'D'E'F']$ têm por bases $[ABC]$ e $[A'B'C']$ que são iguais, as arestas laterais correspondentes são iguais.

Tese: Tronco do prisma recto $[ABCDEF]=$ Tronco do prisma recto $[A'B'C'D'E'F']$.

[8] Chama-se tronco de prisma a cada um dos poliedros determinados num prisma por um plano secante oblíquo em relação às bases, o qual encontra todas as arestas laterais.

Um tronco de prisma recto é aquele em que uma das bases é perpendicular às arestas laterais.

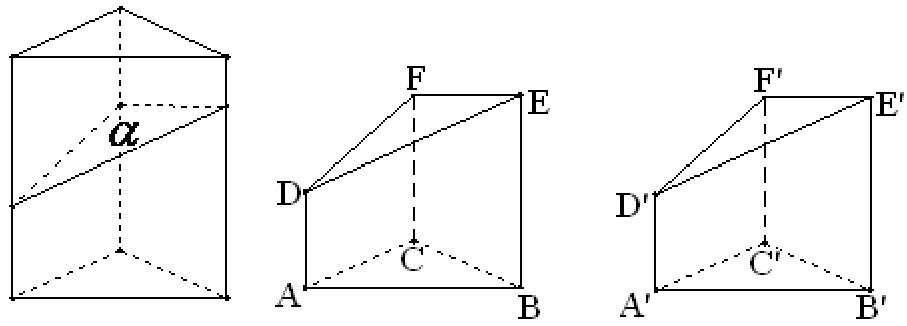


Fig.2

Demonstração

Pela hipótese as bases $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são iguais, então $[AB]=[A'B'],[BC]=[B'C']$ e $[CA]=[C'A']$.Como pela hipótese as arestas correspondentes são iguais vem: $[DA]=[D'A']$, $[EB]=[E'B']$ e $[FC]=[F'C']$, tratando-se de tronco de prismas rectos, as arestas são todas perpendiculares ao plano da base, logo deslocando o prisma $[A'B'C'D'E'F']$ e sobrepondo $[A'B'C']$ a *ABC*. $[A'D']$ sobrepõe-se a $[AD]$, $[B'E']$ a $[BE]$ e $[C'F']$ a $[CF]$.Como $[D'E'F']$ se sobrepõe a $[DEF]$, conclui-se que $[ABCDEF]=$ $[A'B'C'D'E'F']$.

Teorema 9: Um prisma oblíquo[9] é equivalente a um prisma recto cuja base é uma secção recta do prisma oblíquo e cuja altura éigual a aresta lateral deste prisma.

Hipótese: O prisma $[ABCDEF]$ é oblíquo sendo $[GHI]$ uma secção recta.

Tese: O prisma oblíquo $[ABCDEF]$ é equivalente a um prisma recto cuja base é $[GHI]$ e cuja altura é igual á aresta lateral do prisma oblíquo.

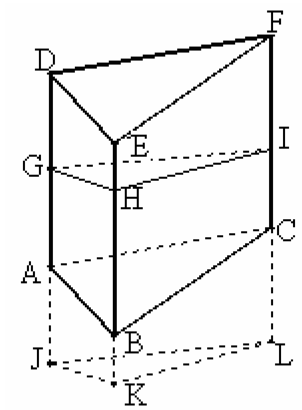


Fig.3

[9] Prisma oblíquo é aquele em que as arestas laterais são oblíquas às bases.

Demonstração

Seja um prisma oblíquo $[ABCDEF]$, prolongue-se a aresta $[AD]$, traçando um segmento $[GJ]=[DA]$, faça-se passar pelo ponto J um plano perpendicular às arestas laterais, que intersecta os prolongamentos de $[BE]$ e $[CF]$, respectivamente em K e L. Seja o prisma $[GHIJKL]$ um prisma recto, temos: $[GJ]=[HK]=[IL]=[DA]=[EB]=[FC]$ e, portanto, $[AJ]=[DG]$, $[BK]=[EH]$ e $[CL]=[FI]$.

Pelo facto de as bases de um prisma serem polígonos iguais[10] $[GHI]=[JKL]$, conclui-se que o tronco de prisma $[GHIDEF]$ é igual ao tronco do prisma $[JKLABC]$ pelo teorema anterior e, portanto, o prisma $[ABCDEF]$ é equivalente ao prisma $[GHIJKL]$.

4.2 VOLUME DE PRISMAS

Axioma 1: O volume de um paralelepípedo rectângulo é igual ao produto da área de uma base pela altura do paralelepípedo ($V_P = A_B \times h$).

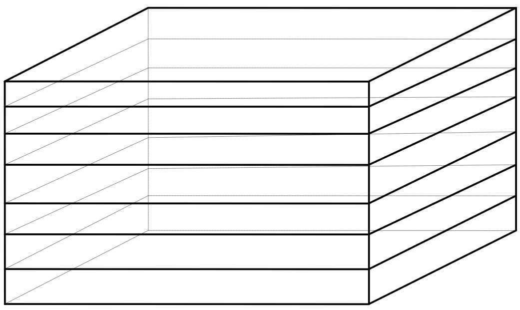


Fig.4

Teorema 10: O plano que passa por duas arestas opostas de um paralelepípedo divide-o em dois prismas triangulares equivalentes.

[10] Atendendo que as bases de um prisma são secções feitas num espaço prismático por planos paralelos e que as arestas laterais são segmentos paralelos.

Hipótese: Um plano α passa pelas duas arestas opostas $[AE]$ e $[CG]$, do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

Tese: O prisma $[ABCEFG]$ é equivalente ao prisma $[CDAGHE]$.

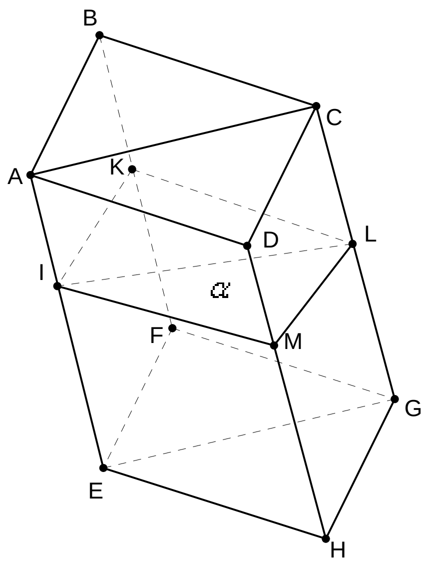


Fig.5

Demonstração

Seja $[IKLM]$ uma secção feita no paralelepípedo a qual é intersectada pelo plano α segundo o segmento$[\mathrm{IL}]$.

Como os planos que passam pelas faces $[ADHE]$ e $[BCGF]$ são paralelos e $[IM] \in [ADHE], [KL] \in [BCGF]$ então $[IM] \| [KL]$, da mesma forma $[IK] \| [ML]$, $[IKLM]$ é um paralelogramo, sendo $[\mathrm{IL}]$ diagonal do paralelogramo então $[IKL] = [IML]$ pois os três lados são iguais (critério de igualdade de triângulo LLL).

Tendo em conta que as arestas laterais de um prisma são segmentos iguais, vem que $[AE] = [BF] = [CG] = [DH]$, levando a concluir que o prisma $[ABCEFG]$ é equivalente ao prisma $[ACDEGH]$.

Teorema 11: O volume de um prisma triangular é igual ao produto da área da base pela altura.

Hipótese: O prisma triangular $[ABCDEF]$ tem o volume V_P, área da base A_B e altura h.

Tese: $V_P = A_B \bullet h$.

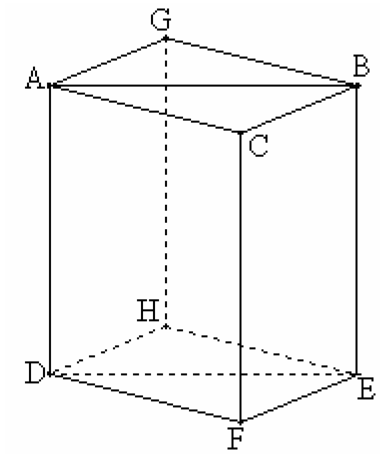


Fig.6

Demonstração

Com as arestas iguais $[AC]$,$[BC]$ e $[CF]$ constrói-se o paralelepípedo $[AGBCDHEF]$. Seja A'_B a área da base do paralelepípedo, cuja altura é a mesma que a do prisma. Como o volume do prisma $[ABCDEF]$ é igual a metade do volume do paralelepípedo, pelo teorema anterior tem-se que $V_P = \frac{1}{2} A_B' \bullet h$.

Por outro lado $[AB]$ e $[DE]$ são diagonais das faces $[AGBC]$ e $[DHEF]$, logo $A_B = \frac{1}{2} A_B'$, portanto $V_P = A_B \bullet h$.

Teorema 12:O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.

Hipótese: Um prisma tem volume V, área da base A_B e altura h.

Tese: $V_P = A_B \bullet h$

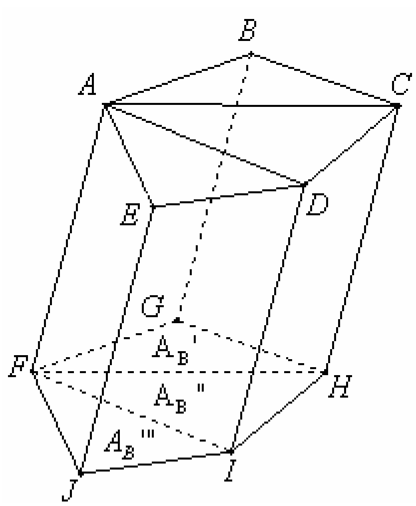


Fig.7

Demonstração

Façam-se passar planos pela aresta lateral $\left[AF\right]$ e pelas arestas laterais, não consecutivas, $\left[CH\right],\left[DI\right],\ldots$

O prisma fica dividido em prismas triangulares, tendo todos uma altura igual à do prisma considerado.

Sejam $A_B', A_B'', A_B''',\ldots$ as áreas das bases de cada prisma triangular e $V_P', V_P'', V_P''',\ldots$ os respectivos volumes.

Tem-se:

$V_P' = A_B' \bullet h, V_P'' = A_B'' \bullet h, V_P''' = A_B''' \bullet h,\ldots$ donde $V_P' + V_P'' + V_P''' + \ldots = \left(A_B' + A_B'' + A_B''' + \ldots\right) \bullet h$ ou $V_P = A_B \bullet h$.

Corolário I: O volume de um prisma recto é igual ao produto da área da base pela medida de uma das arestas laterais.

Com efeito, a medida de uma aresta lateral do prisma recto é igual à altura.

Corolário II: o volume de um prisma oblíquo é igual ao produto da área de uma secção recta pela medida de uma das arestas laterais.

Porque um prisma oblíquo é equivalente a um prisma recto cuja base é a secção recta do prisma oblíquo e altura é igual à medida da aresta lateral (Teorema 9).

Corolário III: Os volumes de dois prismas que têm bases equivalentes estão entre si como as alturas.

Com efeito, seja $V_P = A_B \bullet h$ e $V_P' = A_B \bullet h'$ donde $\frac{V_P}{V_P'} = \frac{A_B \bullet h}{A_B \bullet h'} \Leftrightarrow \frac{V_P}{V_P'} = \frac{h}{h'}$.

Corolário IV: Os volumes de dois prismas que têm alturas iguais estão entre si como as áreas das bases.

Com efeito, seja $V_P = A_B \bullet h$ e $V_P' = A_B' \bullet h$, $\frac{V_P}{V_P'} = \frac{A_B \bullet h}{A_B' \bullet h} \Leftrightarrow \frac{V_P}{V_P'} = \frac{A_B}{A_B'}$.

Corolário V: Prismas com bases equivalentes e alturas iguais são equivalentes.

4.3 VOLUME DE PIRÂMIDE E DE PIRÂMIDE TRUNCADA

Teorema 13: Divide-se a altura h de uma pirâmide triangular em n partes iguais e fazendo passar, pelos pontos de divisão, planos paralelos à base construindo-se prismas cujas bases são as secções obtidas e alturas iguais a $\frac{h}{n}$. Quando o número de prismas aumenta para o infinito, o seu volume total tem por limite o volume da pirâmide triangular.

Hipótese: A pirâmide triangular $[VABC]$ tem por altura h e cada um dos prismas $P'_1, P'_2, \ldots P'_{n-1}$, tem de altura $\frac{h}{n}$ (Fig.8, $n = 3$).

Tese: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{V}_{(P'_1+P'_2+\ldots+P'_{n-1})} = V_P$.

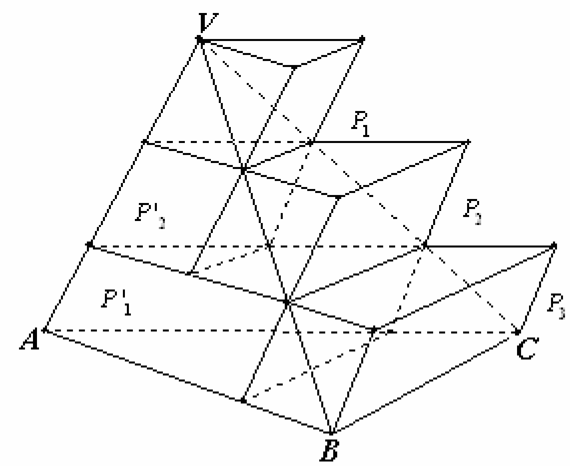


Fig.8

Demonstração

Construam-se os prismas $P_1, P_2, \ldots P_n$, tendo cada um deles a base comum com cada um dos prismas $P'_1, P'_2, \ldots P'_{n-1}$, e com a base da pirâmide, sendo as arestas laterais paralelas à aresta $[VA]$.

A soma dos volumes dos prismas $P'_1, P'_2, \ldots$ é menor que o volume da pirâmide e a soma dos volumes dos prismas $P_1, P_2, P_3, \ldots$ é maior.

Fazendo tender o número de prismas para o infinito, a soma dos volumes dos prismas $P'_1, P'_2, \ldots$ vai aumentando e a soma dos volumes dos prismas $P_1, P_2, P_3, \ldots$ vai diminuindo, tendendo ambas as somas por limites o volume da pirâmide, portanto, $\lim_{n\to\infty} V_{(P'_1+P'_2+\ldots+P'_{n-1})} = V_P$.

Teorema 14: Duas pirâmides triangulares com bases equivalentes e alturas iguais são equivalentes.

Hipótese: As pirâmides triangulares $[VABC]$ e $[V'A'B'C']$ têm bases equivalentes alturas iguais e os volumes respectivamente V_P e V_P' .

Tese: $V_P = V_P'$

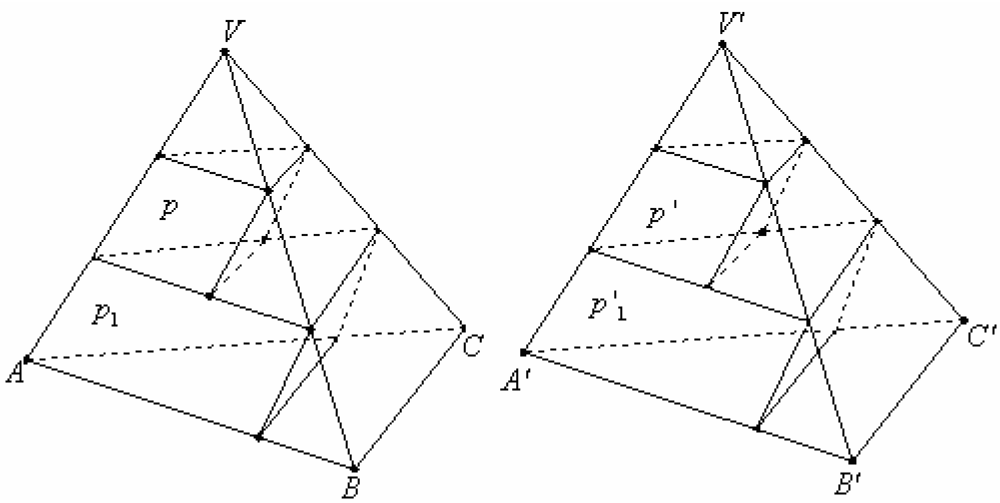


Fig.9

Demonstração

Dividam-se as alturas em n partes iguais (na Fig.9 n=3) e, pelos pontos da divisão, façam-se passar planos paralelos a cada uma das bases das respectivas pirâmides.

Tomando as secções para bases, construam-se prismas cujas arestas sejam paralelas a $[AV]$ e $[A'V']$, nas pirâmides $[VABC]$ e $[V'A'B'C']$ respectivamente.

Sejam $p, p_1, \ldots, p_{n-1}$ os prismas obtidos na pirâmide $[VABC]$ e $p', p'_{1,} \ldots, p'_{n-1}$ os obtidos na pirâmide $[V'A'B'C']$. Como as secções correspondentes, feitas pelos planos paralelos, são equivalentes (Teorema 2 Cor. II) conclui-se que pelo teorema 12 Cor. V que $V_p = V_{p'}, V_{p_1} = V_{p'_1}, \ldots, V_{p_{n-1}} = V_{p'_{n-1}}$, donde $V_{(p+p_1+\ldots+p_{n-1})} = V_{(p'+p'_1+\ldots+p'_{n-1})}$.

Levando em consideração o teorema anterior $\lim_{n\to\infty} V_{(p+p_1+\ldots+p_{n-1})} = V_P$ e $\lim_{n\to\infty} V_{(p'+p'_1+\ldots+p'_{n-1})} = V_P'$ concluindo-se que $V_P = V_P'$.

Teorema 15: Um prisma triangular é decomposto em três pirâmides equivalentes.

Hipótese: $\left[ABCDEF\right]$ é um prisma triangular.

Tese: O prisma é decomponível em três pirâmides equivalentes.

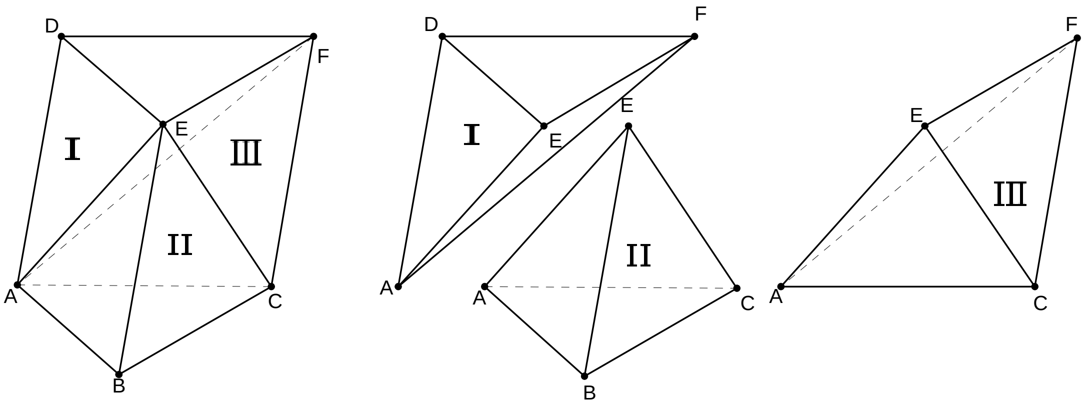


Fig.10

Demonstração

Intersectando o prisma pelo plano definido pelos vértices *A*, *E* e *C* e pelo plano definido pelos vértices *A*, *E* e *F*, o prisma fica decomposto em três pirâmides $\left[ADEF\right]$, $\left[EABC\right]$ e $\left[EACF\right]$.

O plano que passa pelos vértices *A*, *E* e *F* tem o segmento $\left[AF\right]$em comum com a face $\left[ADFC\right]$, que é diagonal desse polígono, formando assim dois triângulos $\left[ADF\right]=\left[FCA\right]$, da mesma forma $\left[BEC\right]=\left[FCE\right]$ e $\left[ABC\right]=\left[DEF\right]$, pois são as bases do prisma.

Pelo teorema anterior conclui-se que a pirâmide I é equivalente à pirâmide III e a pirâmide I é equivalente à pirâmide II, então as pirâmides I, II e III são equivalentes entre si.

Corolário – O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Considerando a pirâmide II, ela tem a mesma base que o prisma e a altura é igual. Como $V_P = A_B \bullet h$, as três pirâmides são equivalentes, temos que para a pirâmide triangular$V_P = \dfrac{1}{3} A_B \bullet h$.

Teorema 16: O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Hipótese: Uma pirâmide tem o volume V_P, área da base A_B e altura h.

Tese: $V_P = \frac{1}{3} A_B \bullet h$.

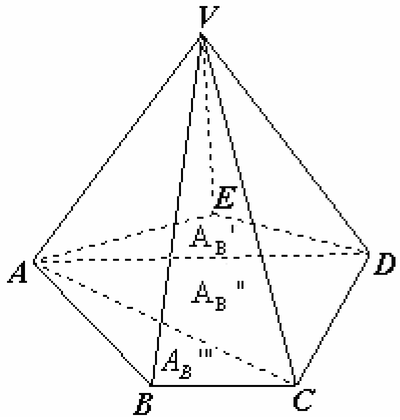


Fig.11

Demonstração

Faça-se passar planos pela aresta lateral $[VA]$ e pelas arestas laterais não consecutivas, $[VC]$, $[VD]$,…

A pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares, tendo todas uma altura igual à da pirâmide inicial.

Sejam $A_B', A_B'', A_B''', \ldots$ as áreas das bases de cada pirâmide triangular e $V_P', V_P'', V_P''', \ldots$ os seus respectivos volumes.

Pelo corolário do teorema anterior temos: $V_P' = \frac{1}{3} A_B' \bullet h, V_P'' = \frac{1}{3} A_B'' \bullet h, V_P''' = \frac{1}{3} A_B''' \bullet h, \ldots$

donde $V_P' + V_P'' + V_P''' + \ldots = \frac{1}{3}\left(A_B' + A_B'' + A_B''' + \ldots\right) \bullet h \Leftrightarrow V_P = \frac{1}{3} A_B \bullet h$.

Corolário I – Os volumes de duas pirâmides que têm bases equivalentes estão entre si como as alturas.

Corolário II – Os volumes de duas pirâmides que têm alturas iguais estão entre si como as áreas das bases.

Corolário III – Pirâmides com bases equivalentes e alturas iguais são equivalentes.

Definição 11: O volume do tronco de uma pirâmide é dada pela diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide resultante da secção (pirâmide menor).

Teorema 17: O volume do Tronco de uma pirâmide de bases paralelas é igual a um terço da altura do tronco da pirâmide por, área da base maior mais área da base menor mais a raiz quadrada do produto das áreas das duas bases.

Hipótese: Uma pirâmide, seccionada por um plano paralelo à base, tem por altura h área da base A_B e volume V_P. A pirâmide resultante da secção transversal tem por altura h', área da base A_B' e volume V_P'. O tronco da pirâmide seccionada tem de altura h'' e volume V_T.

Tese: $V_T = \frac{h''}{3} \bullet \left(A_B + A_B' + \sqrt{A_B \bullet A_B'} \right)$.

Demonstração

Sejam $V_P = \frac{1}{3}.A_B \bullet h$ e $V_P' = \frac{1}{3}.A_B' \bullet h'$. Pela definição anterior temos: $V_T = V_P - V_P' = \left(\frac{1}{3}.A_B \bullet h \right) - \left(\frac{1}{3}.A_B' \bullet h' \right) \Leftrightarrow V_T = \frac{1}{3}\left(A_B \bullet h - A_B' \bullet h' \right)$, como $h = h' + h''$ segue que $V_T = \frac{1}{3}\left(A_B \bullet h - A_B' \bullet (h - h'') \right) \Leftrightarrow V_T = \frac{1}{3}\left(h\left(A_B - A_B' \right) + A_B' \bullet h'' \right)$.

Sabe-se pela hipótese que as duas bases são paralelas, então pelo Teorema 2 Cor. I, temos que $\frac{A_B}{A_B'} = \left(\frac{h}{h'} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{A_B}{A_B'} = \frac{h^2}{(h - h'')^2} \Leftrightarrow \left(A_B - A_B' \right) h^2 - 2hh'' A_B + A_B h''^2 = 0$.

Aplicando a fórmula resolvente obtém-se $h = \frac{h''\left(A_B \pm \sqrt{A_B' A_B} \right)}{A_B - A_B'}$. Considerando a raíz

$$h = \frac{h''\left(A_B + \sqrt{A_B' A_B} \right)}{A_B - A_B'} \Leftrightarrow h = h'' \frac{\sqrt{A_B}\,\cancel{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_B'} \right)}}{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_B'} \right) \bullet \cancel{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_B'} \right)}} \Leftrightarrow h = \frac{h'' \bullet \sqrt{A_B}}{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_B'} \right)}$$

e substituindo-a na expressão $V_T = \frac{1}{3}\left(h\left(A_B - A_B' \right) + A_B' \bullet h'' \right)$ vem:

$$V_T = \frac{h''}{3}\left[\frac{\sqrt{A_B}}{\cancel{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_B'} \right)}} \cancel{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_B'} \right)} \bullet \left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_B'} \right) + A_B' \right]$$

$$\Leftrightarrow V_T = \frac{h''}{3}\left(A_B + A_B' + \sqrt{A_B \bullet A_B'} \right).$$

CAPÍTULO V: O ESTUDO DE PIRÂMIDES NO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

5.1 PROGRAMA PROPOSTO PARA O ESTUDO DE PIRÂMIDES NO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

Segundo a lei de Bases do sistema educativo artigo 20º, o ensino básico (encadeado na educação escolar) abrange um total de seis anos de escolaridade, sendo organizado em três fazes, cada uma das quais com uma duração de dois anos.

A primeira fase do ensino básico abrange actividades com finalidades propedêuticas e de iniciação. A segunda de formação geral, enquanto a terceira, visa o alargamento e aprofundamento dos conteúdos cognitivos transmitidos, com o objectivo de elevar o nível de instrução adquirido.

A estrutura curricular do ensino básico obedece aos seguintes princípios:

a) Unidade curricular;

b) Integração disciplinar.

É de realçar que durante os seis anos do ensino básico a matemática é uma das disciplinas básicas.

Face aos novos desafios do mundo actual, no momento em que se prepara para uma nova revisão curricular e se propõe aos professores uma abordagem por competências, torna-se necessário repensar sobre os conteúdos leccionados a nível dos ensinos básico e secundário, de forma a instruir indivíduos capacitados, aptos a enfrentar as dificuldades actuais e prontos a ingressar-se no ensino médio e superior.

É nesse contexto de mudanças que pretendemos analisar o conteúdo programático sobre o estudo de pirâmides nos dois níveis de ensino supracitado e apresentar algumas propostas de mudanças.

1º e 2º Anos de escolaridade

Segundo a organização curricular e o guia do professor do ensino básico, os alunos têm o seu primeiro encontro com os sólidos geométricos no capítulo da geometria. Segundo as orientações do programa, esse estudo deve ser feito de forma intuitiva, a partir de modelos de sólidos e de objectos do uso corrente.

Devemos acrescentar que apesar desse conteúdo estar presente no programa, não consta no manual escolar, do nosso país, dedicado a esse nível.

No segundo ano, propõe-se que os alunos observem as superfícies planas e curvas.

É de salientar que essa matéria não é apresentada no manual do 2º ano, mesmo sendo apresentado no guia do professor e no programa de matemática.

3º e 4º Anos de escolaridade

Segundo os mesmos documentos, no mesmo tema, os alunos devem estudar os sólidos cubo e esfera no 3º ano, e no ano seguinte paralelepípedos e cilindros.

Nesse nível, a pirâmide aparece no manual de forma figurativa, juntamente com os sólidos: cubo, esfera, cilindro, paralelepípedo e cone.

5º e 6º Anos de escolaridade

No 5º ano devem estudar prismas, pirâmides, cones e efectuar a planificação da superfície desses sólidos.

No âmbito do estudo da pirâmide constam como objectivos:

- Identificar pirâmides;
- Identificar faces, numa pirâmide:
- Identificar arestas, numa pirâmide;
- Identificar vértices, numa pirâmide;

- Reconhecer planificação de pirâmides;
- Construir modelos de pirâmides a partir de planificações dadas.

No manual dedicado a este ano escolar são apresentados vários tipos de pirâmides, numa fase inicial os alunos devem identificar a pirâmide e observar os objectos que se assemelham a ela, posteriormente ela é apresentada como um sólido em que todas as faces são superfícies planas.

Mais a frente, os alunos devem aprender que as pirâmides recebem os nomes de acordo com o polígono da base.

No estudo de planificação dos sólidos apresenta-se a planificação de uma pirâmide quadrangular, onde o aluno deve reproduzir numa folha de cartolina ou num papel grosso, recortar, dobrar, colar e identificar o sólido obtido.

Como exercício da unidade são apresentadas, juntamente com outros sólidos, duas pirâmides (quadrangular e hexagonal) onde os alunos devem apresentar os respectivos nomes. Também são apresentados exercícios onde os alunos devem concluir que as faces laterais das pirâmides são triângulos e, que numa pirâmide, o número de faces é igual ao número de vértices (sendo a base apresentada como uma das faces da pirâmide).

No último ano do EBI, apresenta-se no programa como conteúdo de estudo, área e volume de sólidos, mas segundo o programa e o manual escolar dedicado a esse nível não se estuda a área lateral e o volume das pirâmides.

Segundo a lei de base do sistema educativo, artigo 21º, o ensino secundário dá continuidade ao ensino básico e permite o desenvolvimento de conhecimentos e aptidões obtidos no ciclo de estudo precedente e aquisição de novas capacidades intelectuais e aptidões físicas necessárias à intervenção criativa na sociedade.
Ele tem a duração de 6 anos e encontra-se organizado em 3 ciclos de 2 anos de estudo cada.

a) Num 1º ciclo ou tronco comum (correspondente aos 7º e 8º anos)
b) Num 2º ciclo com uma via geral e uma via técnica
c) Num 3º ciclo com uma via geral e uma via técnica

A via do ensino geral é organizada em 2 ciclos que correspondem respectivamente, aos 9º e 10º anos e aos 11º e 12º anos de escolaridade.

Nos 1º e 2º ciclos a Matemática é uma disciplina obrigatória no currículo, sendo no 3º ciclo obrigatória para as áreas das Ciência e Tecnologia e Económico e Social.

7º e 8º Anos de escolaridade

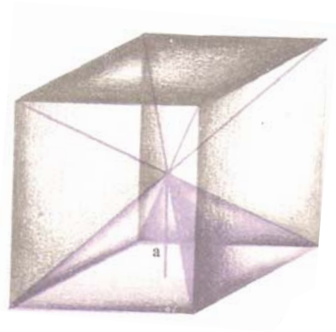
No 7º ano os alunos, eventualmente, entram em contacto com a pirâmide no estudo do tema espaço e plano, especificamente, no estudo de posições relativas de rectas e planos e rectas complanares. Fazem-se passar planos pelas faces da pirâmide e rectas pelas suas arestas e estudam-se as posições relativas dos planos que passam pelas faces e das rectas que passam pelas arestas.

No 8º Ano, a pirâmide volta a aparecer no manual na unidade 10 «Áreas e Volumes» aquando do estudo de sólidos e seus volumes.

Segundo as orientações do programa, os alunos devem aprender que as pirâmides são poliedros, o conceito de pirâmide regular e trabalhar com área e volume de pirâmide regular.

Também, aparecem no manual escolar desse nível, alguns elementos da pirâmide (vértice, aresta lateral, face e aresta da base).

No cálculo do volume da pirâmide, a fórmula é generalizada a partir de uma pirâmide quadrangular regular cuja base é uma face de um cubo e cujo vértice é o centro desse cubo.



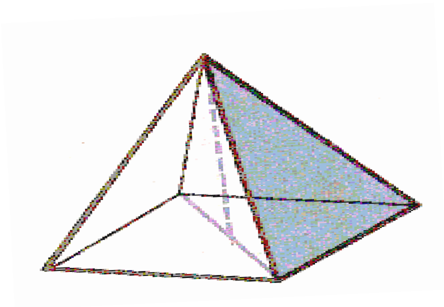


Fig.1

Assim, o volume da pirâmide é apresentado como um sexto do volume do cubo, isto é, um terço da área da base da pirâmide pela sua altura $\left(V_P = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}A_b \times h\right)$.

Como exercícios são apresentadas algumas pirâmides regulares, onde se sabe a altura e a medida de uma aresta da base e se pede para calcular o volume, também apresenta-se o volume de alguns sólidos compostos, em que a pirâmide aparece na composição do sólido.

9º e 10º Anos de escolaridade

Analisando o programa de matemática do 2º ciclo constata-se que no 9º Ano os alunos podem não entrar em contacto com as pirâmides, uma vez que o conteúdo programático não sugere o estudo de sólidos.

No 10º Ano, no tema geometria, estuda-se o volume da esfera e área da superfície esférica.

11º e 12 Anos de escolaridade

No 3º ciclo a única disciplina que supostamente faz referência às pirâmides é a Geometria Descritiva (G.D.), uma disciplina opcional, bianual, apenas para os alunos da área Ciência e Tecnologia, mas em alguns liceus ela nem sequer é apresentada como opção, talvez devido a falta de docentes da disciplina de Geometria.

5.2 ANÁLISE CRÍTICA DOS PROGRAMAS DO EBI E ES AQUANDO DO ESTUDO DE PIRÂMIDES, PROPOSTAS PARA O ESTUDO DE PIRÂMIDES SEGUNDO A NOVA ORIENTAÇÃO CURRICULAR, ABORDAGEM POR COMPETÊNCIA (APC)

A partir do guia do professor, dos programas do ensino básico e do ensino secundário e dos manuais nacionais dedicados a esses dois níveis, podemos apresentar algumas considerações e propostas sobre o estudo de pirâmides.

Fica a impressão que no 1º nível do ensino básico os alunos não entram em contacto com esse sólido, devido ao facto de parecer existir uma discórdia entre os programas e os manuais desses níveis, relativamente a esse conteúdo.

Se levarmos em consideração que no 2º nível deve-se fazer o estudo dos sólidos: cubo, esfera, paralelepípedos e cilindros, chegamos a conclusão que talvez não seja ainda que os alunos ficam a conhecer as pirâmides, apesar de aparecerem no manual escolar, de forma figurativa, ao lado dos outros sólidos.

Ao que parece o encontro dos alunos com a pirâmide dá-se propriamente no 5º ano do ensino básico, pois é nesse nível que é proposto diferenciarem esse sólido dos demais, conhecer alguns dos seus elementos e identificá-los assim como distinguir vários tipos de pirâmides.

Parece ser a única etapa, do ensino básico ao ensino secundário, onde os alunos mais aprendem sobre a pirâmide, uma vez que nos níveis que se seguem o estudo da pirâmide parece depender mais do professor que estiver a trabalhar, do que do programa. Podendo o aluno conhecer apenas algumas fórmulas para o cálculo de área e volume.

Podemos concluir que o estudo feito sobre esse sólido no ensino básico e secundário é muito superficial, não ultrapassando o nível de conhecimento, dependendo assim do interesse do professor nesse tema e na sua habilidade em abordar o mesmo.

Levando em consideração o conceito histórico que esse sólido geométrico possui, deve-se dar mais atenção aquando do seu estudo.

Atendendo às novas exigências que hoje aparecem, esse conteúdo apresenta suportes que permitem que o aluno vá construindo o seu conhecimento enquanto interrelaciona os conhecimentos adquiridos em outras disciplinas como: Expressão Plástica, História, Geografia, Desenho e Educação Visual e Tecnológica.

Para que o novo processo decorra da melhor forma possível, é necessário que o professor de Matemática esteja habilitado a identificar no educando uma fonte de conhecimentos, oriundos de vários meios. Esses conhecimentos podem ser aproveitados de forma útil e integrados nos novos conhecimentos que o próprio vai construindo mediante as orientações do professor, que agora passa a ser um facilitador e principalmente um orientador.

Dessa forma, propomos em anexo alguns exemplos de actividades que podem ser desencadeados pelos alunos, sob a orientação do professor, de forma que possam adquirir saberes sobre a pirâmide de forma activa e divertida, sem deixar de cumprir o conteúdo programado e segundo a perspectiva da APC.

Assim, propomos que o estudo da pirâmide inicie logo no 1º ano do ensino básico, uma fase onde os alunos gostam de observar e tactear.

Nesse nível, o professor pode apoiar-se sobre a disciplina de Desenho e Expressão Plástica e desfrutar da comunicação visual, propondo aos alunos tarefas simples e divertidas que ao mesmo tempo podem integrar outros conhecimentos.

<u>Competência a ser atingida no final da unidade: Identificar objectos que se assemelham às pirâmides.</u>

Com o intuito dos alunos construírem a referida competência serão apresentadas algumas actividades, das quais as três primeiras integram o conhecimento da mesma matéria, as cores, mas no entanto cada uma possui a sua particularidade.

Na actividade 1 o aluno possui as dificuldades repartidas em etapas e a não realização de uma não impede a realização de outra, a actividade 2 é apresentada de uma forma extensa para um aluno de 1º ano, enquanto na 3 se o aluno tiver dificuldades em identificar as cores, fica com um obstáculo a mais no seu caminho, podendo não atingir o objectivo do trabalho. Sendo assim, a actividade 1 é a mais indicada para os alunos desse nível.

Com esses tipos de actividades, os alunos ficam a saber que existem sólidos denominados por pirâmides e que eles podem ser de vários tipos.

O professor deve prestar muita atenção nas instruções, de modo que cada instrução possa ser independente e fazer com que a execução de uma tarefa não fique em causa por causa de pouco domínio numa outra matéria.

Ele deve estar ciente das oportunidade que os alunos têm para trabalhar sozinhos, devendo acompanhar o desempenho dos mesmos nas carteiras.

Como a APC propõe situações de integração[11] dos saberes, e tendo em conta que a eficácia da aprendizagem está ligada às ocasiões em que o aluno tem para discutir com os colegas, de modo a acompanhar o que aprendeu, propomos que no final do tema a turma realize as seguintes actividades de integração, se for possível em grupo de quatro alunos[12].

Para ser eficaz, o professor deve dar algumas explicações breves, mas deve sobretudo, fazer com que os alunos trabalhem sozinhos.

No 2º ano do ensino básico, um dos objectivos do capítulo da geometria é identificar superfícies planas e curvas. Aqui o professor tem novamente a oportunidade de trabalhar com as pirâmides juntamente com a turma.

Lembremos que ao professor cabe a tarefa de ensinar ao aluno para além de saberes, saber-fazer e saber-ser, por isso, as aulas devem ser preparadas e guiadas de forma que o aluno possa construir todas as competências necessárias.

O professor pode e deve aproveitar os saberes adquiridos no ano transacto, assim como as experiências vividas pelos educandos, para construir novos saberes.

<u>Pensamos que nessa fase, uma competência a ser desenvolvida é moldar pirâmides a partir da observação dos objectos.</u>

---

[11] Segundo Xavier Roegiers, uma situação de integração é aquela que permite exercer a competência, verificar se os alunos integraram os recursos adquiridos recentemente e se novos objectivos foram atingidos. Ela é realizada depois de um conjunto de lições.

[12] Ver actividade 4 e 5 em anexo.

Porá esse efeito, propomos como objectivos a serem alcançados pelos alunos:

-Comparar pirâmides;

-Moldar pirâmides a partir de plasticinas ou massa de papel reciclado;

-Identificar o polígono (superfície plana) da base de uma pirâmide;

-Identificar superfícies planas, numa pirâmide;

-Identificar a pirâmide como um poliedro.

Com esse intuito, propomos uma actividade que segundo APC, é considerada uma situação complexa.

Mas, convém enunciar as propriedades de uma situação complexa, segundo Xavier Roegiers.

-É uma situação-problema que exige a articulação de vários saberes e saberes-fazer para poder ser resolvido pelo aluno e pode fazer apelo às outras disciplinas.

-É uma situação próxima dos centros de interesse dos alunos.

-É uma situação em que os alunos são agentes activos.

-É uma situação que pode ser trabalhada em Grupo.

Actividade 6

Modela vários tipos de pirâmides, utilizando papéis reciclados e identifica os seus elementos.

Os alunos podem realizar essa actividade na disciplina de Expressão Plástica e/ou Matemática.

Nessa actividade eles aplicam os conhecimentos sobre algumas técnicas de reciclagem de papel, ao mesmo tempo que defrontam com a educação ambiental, a necessidade de preservar o ambiente.

A partir dos moldes, o professor pode fazer com que os alunos adquiram os saberes que pretende através de aulas práticas.

Ele ainda pode aproveitar que os alunos nessa idade apreciam histórias, para lhes falar um pouco das pirâmides de Egipto, baseando-se em figuras que pode recortar e/ou fazendo referência a algumas situações em que os alunos podem visualizar as pirâmides.

Tendo em conta que nos dois anos seguintes os programas propõem o estudo, específico, de alguns sólidos que têm a forma dos objectos que os alunos utilizam no dia – a – dia o professor precisa ser muito criativo com os exemplos e as actividades que podem ser levadas a cabo pelos alunos.

Sendo assim, o professor deverá aproveitar que os alunos nessa fase gostam de desenhar, recortar, colar e pintar para propor à turma que desenhe, recorte, cole e pinte planificação de pirâmides para fins decorativos. Essa actividade pode ser repetida por época de Natal com a intenção de decorar a sala e a árvore de natal.

Nesse nível, o professor pode introduzir o conceito de tronco de pirâmide através de cortes (secções) de modelos de sólidos. As secções, em diferentes posições, também podem ser utilizadas para fins decorativos.

Uma actividade divertida consiste em confeccionar porta jóias a partir de tronco de diferentes pirâmides.

Dessa forma, o professor integra novos conhecimentos, como por exemplo secções e tronco de pirâmides, nas actividades do dia – a – dia do aluno (decoração).

Propomos como objectivos nesses dois anos:

-Identificar vários tipos de pirâmides;

-Identificar os vértices da pirâmide;

-Identificar faces, de pirâmides;

-Identificar arestas, de pirâmides;

-Definir vértice da pirâmide;

-Definir aresta da pirâmide;

-Diferenciar arestas laterais de arestas da base;

-Definir faces da pirâmide;

-Relacionar a base da pirâmide com o seu número de faces;

-Relacionar a base da pirâmide com o seu respectivo nome;

-Identificar pirâmide regular;

-Definir pirâmide regular;

-Determinar a área da base de uma pirâmide regular;

-Construir secções de Pirâmides;

-Definir Tronco de Pirâmide.

Para atingir esses objectivos com maior sucesso, a turma deve utilizar sólidos moldados nas aulas.

Cabe ao professor a tarefa de organizar a aprendizagem dos alunos de acordo com o nível do desenvolvimento cognitivo dos mesmos, assim como escolher a melhor estratégia possível; podendo acrescentar ou retirar os objectivos que achar conveniente para a turma, pois o processo deve ser centralizado no aluno e não no conteúdo a ser leccionado, assim se orienta segundo a nova orientação pedagógica designada pedagogia por objectivos.

Uma vez que os dois últimos anos servem para consolidar o ensino básico e como fase transitória entre ensino básico e ensino secundário, propomos que se faça o estudo de área de pirâmide regular, juntamente com outros sólidos. Dessa forma os alunos levam para o liceu o mesmo nível de conhecimento, no que tange a sólidos geométricos, e ficam mais aptos para resolver certas questões de ordem prática.

Pesamos que a capacidade de resolver problemas reais que envolvem o cálculo de área de pirâmides regulares é a competência a ser desenvolvida.

Com esse desígnio, propomos que sejam realizadas várias actividades de integração que envolvem o cálculo de áreas. O professor deve ser eficiente ao ponto de adaptar os trabalhos utilizando planificações de pirâmides.

Nesse âmbito, propomos a realização de uma actividade de integração[13], que pode ser realizada no final do estudo desse tema.

Essa actividade vem mesmo a calhar, porque estamos numa altura em que as doenças provocadas por radiação solar constituem uma preocupação para os pais e agentes de saúde.

Assim, o professor pode aproveitar a ocasião para:

-Avaliar o conhecimento dos alunos sobre esse assunto.

-Trabalhar as formas de prevenção de doenças provocadas por exposição, demasiada, ao sol.

-Solicitar a execução de um trabalho de campo junto ao posto sanitário. Esse trabalho pode consistir na divisão da turma em vários grupos, onde cada grupo pode pesquisar sobre um tipo de doença provocado por esse factor.

-Mobilizar um agente de saúde até a sala de aula, para falar com os alunos a respeito.

Para esse conteúdo propomos como objectivos:

-Definir apótema de uma pirâmide;

-Definir área lateral de uma pirâmide regular;

-Definir área total de uma pirâmide regular;

-Determinar a área da base de uma pirâmide regular;

-Determinar a área lateral de uma pirâmide regular;

-Determinar a área total de uma pirâmide regular;

-Aplicar os saberes sobre áreas de pirâmides regulares na resolução de problemas em situações reais.

Apresentamos algumas mudanças nos conteúdos, estratégias e objectivo do ensino básico, no que diz respeito ao estudo de pirâmides, porque torna-se necessário fornecer aos

[13] Ver actividade 7 em anexo.

alunos uma gama de conhecimentos, mediantes práticas pedagógicas correctas, de modo que ao terminar o ensino básico os mesmos já tenham delineado alguns traços do seu perfil e estejam minimamente preparados para enfrentar a sociedade. Com isso, o educando torna-se ciente das suas potencialidades e limitações ainda num período da delineação do seu perfil, permitindo orientar as suas necessidades de acordo com as mentas que pretende alcançar.

No que tange ao estudo de pirâmides no ensino secundário, ela pode iniciar-se logo no 7º ano, a quando do estudo das posições relativas de rectas e planos, assim como posição relativa de planos.

Assim, pode-se fazer passar rectas pelas arestas e planos pelas faces, permitindo estudar as diferentes posições entre rectas e planos no espaço.

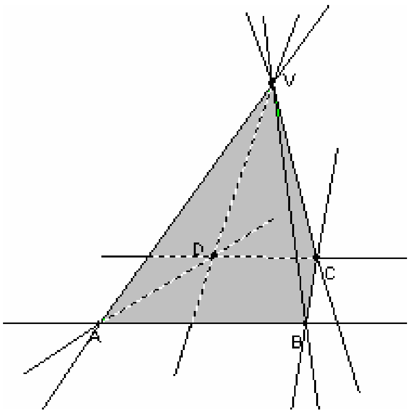


Fig.7

Aqui, o objecto em estudo não é a pirâmide, mas sim posições relativas. A pirâmide aparece como um instrumento capaz de fornecer aos educandos uma aprendizagem mais eficaz.

O professor pode fazer com que a aprendizagem seja guiada pelos alunos de uma forma viva e interactiva, utilizando sólidos construídos pelos mesmos, solicitando a colaboração do professor da disciplina Educação Visual e Tecnológica (E.V.T.), de forma que os alunos possam construir, com materiais como madeira ou cartão, modelos de pirâmides.

Como actividade, pode propor que os alunos façam passar planos (folhas) pelas faces e rectas (paus) pelas arestas e identifiquem as diferentes posições relativas que vão formando.

O professor pode aproveitar a oportunidade para introduzir novos conceitos como o eixo e retomar o estudo de secções de pirâmides e tronco de pirâmides, vistas no 4º ano.

Através do eixo os alunos podem analisar a posição relativa da recta que passa pelo mesmo e os planos que passam pelas faces laterais e pela base.

A partir do estudo das secções de pirâmides os alunos podem analisar a posição relativa dos planos sectores e dos planos que passam pelas faces, posição relativa dos planos sectores e do plano que passa pela base, assim como a posição das rectas contidas nesses planos.

Dessa forma constariam como objectivos, no âmbito do estudo do conteúdo proposto, fazendo uso das pirâmides:

-Identificar a posição relativa dos planos que passam pelas faces duma pirâmide;

-Identificar a posição relativa das rectas que passam pelas arestas duma pirâmide;

-Identificar a posição relativa entre as rectas que passam pelas arestas e os planos que passam palas faces;

- Identificar a posição relativa entre as rectas que passam pelas arestas e o plano que passa pela base;

-Identificar a posição relativa entre os planos sectores e os planos que passam pelas faces;

- Identificar a posição relativa entre os planos sectores e o plano que passa pela base;

- Identificar tronco de pirâmides;

-Definir eixo de pirâmide;

-Identificar a posição relativa do eixo da pirâmide e dos planos que passam pelas faces.

Assim, o estudo da pirâmide continuaria e agora de uma forma diferente, integrado dentro do estudo de uma outra matéria, permitindo que os alunos sintam a necessidade de estar sempre a par de todas as matérias até então leccionadas, e a inter ligação entre o ensino básico e o ensino secundário.

Ainda, propomos que no âmbito do estudo das posições relativas se efectue o estudo de diedros e rectilíneo do diedro, que no ano seguinte podem ser aproveitados na determinação do volume e medida de alguns elementos da pirâmide.

A nível do ensino secundário, o 8º ano é único nível que parece garantir o estudo sobre a pirâmide. Mesmo assim, fica a sensação que esse estudo é pouco aprofundado, na medida em que é também proposto estudar área e volume dos outros sólidos.

O professor deve inteirar-se sobre os conhecimentos adquiridos pelos alunos até então, relativamente a esse conteúdo, e traçar um plano de trabalho de forma a permitir que os respectivos aprofundem os seus conhecimentos sobre as pirâmides.

Ao nosso entender, determinar o volume de objectos que possuem forma piramidal é a competência a ser desenvolvida pelo aluno no final desse nível. Por isso proporemos a situação didáctica[14] que se segue.

Para o efeito de deduzir a fórmula que permite determinar o volume das pirâmides propomos a actividade 8[15] e que a turma demonstre e estude, com a ajuda do professor, o volume da pirâmide a partir do volume do prisma.

A primeira fase da actividade pode ser desenvolvida na aula de E.V.T. e a segunda na aula de matemática, por motivo de gerência do tempo.

Nessa actividade os alunos é que são os autores e construtores dos seus conhecimentos e aplicam vários saberes e os saberes-fazer desenvolvidos ao longo do estudo dos sólidos geométricos e o professor leva vantagem na interdisciplinaridade entre E.V.T. e Matemática, economizando tempo, assim como vê os objectivos serem alcançados pelos alunos.

Propomos os seguintes objectivos, para esse nível de estudo:

-Relacionar o volume da pirâmide com o volume do prisma;

-Encontrar a fórmula para o cálculo do volume de pirâmide a partir do volume do prisma;

-Resolver problemas de situações reais que envolvem o cálculo do volume da pirâmide regular.

-Determinar área de uma pirâmide;

-Determinar volume de uma pirâmide;

-Resolver problemas que envolvem o cálculo da área de pirâmide;

-Resolver problemas que envolvem o cálculo do volume de pirâmide;

-Determinar alguns elementos de uma pirâmide;

-Aplicar os conhecimentos sobre área de pirâmide na resolução de problemas reais;

-Aplicar os conhecimentos sobre volume de pirâmide na resolução de problemas reais.

Para culminar o estudo de áreas e volumes de sólidos, propomos que seja feita uma semana de integração, dedicando uma aula para o volume de pirâmide. Nesse âmbito propomos a actividade de integração 9, que se encontra em anexo.

Essa actividade permite avaliar o desempenho do aluno em vários conteúdos, porque requer o conhecimento de várias matérias sobre a pirâmide e abrange conhecimentos de outras disciplinas como História e Geografia. Assim sendo, o professor de Matemática pode solicitar

---

[14] Segundo Xavier Roegiers, é uma situação que permite introduzir um novo saber ou um novo saber-fazer. Uma situação em que o aluno manipula, procura, descobre, pratica para melhor compreender, isto é, ele constrói o seu saber.

[15] Ver actividade 8, em anexo

os docentes dessas cadeiras que intercalem conteúdos relacionados ao tema nas suas planificações anuais.

O professor deve propor actividades próximas da realidade do aluno e sempre que possível apelar à interdisciplinaridade, de modo que os alunos possam ver os conhecimentos apreendidos em outras áreas aplicados à Matemática.

Uma vez que 10º ano é uma etapa decisiva para o aluno, um período onde ele deve ter certeza das suas potencialidades e ter o seu perfil delineado, de forma que o permita optar com convicção sobre a área a frequentar no ano seguinte, acreditamos ter uma certa relevância integrar o estudo de área e volume de sólidos com uma base, entre eles a pirâmide, no conteúdo programado para 10º ano.

Esse conteúdo permitirá avaliar os conhecimentos, sobre a pirâmide, adquiridos ao longo dos anos anteriores e consolidar o estudo dos sólidos geométricos.

De forma a integrar alguns conhecimentos adquiridos no 9º ano, propomos ainda como objectivos: resolver problemas que envolvem pirâmides cujas bases estão inscritas numa circunferência e resolver problemas que envolvem circunferência circunscrita a base da pirâmide.

Atendendo que esse nível pode vir a ser última etapa onde os alunos venham a trabalhar com as pirâmides, condiga que a turma trabalhe muito na resolução de problemas de forma a integrar todos os conhecimentos até então adquiridos.

É baseando-se nesse facto que propomos a resolução situação (problema) complexa que se encontra em anexo, em grupo[16].

Esperamos que o professor esteja sempre ciente das novas necessidades do aluno, de forma a adaptar as suas planificações a essas necessidades. Devendo ter sempre em mente que a sua função é orientar na formação de pessoas capacitadas e prontas a actuar em qualquer circunstâncias fazendo, uso dos conhecimentos adquiridos.

[16] Ver actividade 10.

CONCLUSÃO

Findo esse trabalho pudemos concluir que de entre todos os sólidos, a pirâmide é o único que possui maior relevância na história das construções arquitectónicas ao longo dos tempos.

Apesar do seu estudo, no nosso país, tem sido pouco privilegiado, em todos os níveis do ensino, chegamos a conclusão que ele abarca um leque grande de conhecimentos sobre a História, Geometria e Análise, permitindo interdisciplinaridade.

Com esse trabalho, a formanda conseguiu aprofundar os conhecimentos, sobre as pirâmides, adquiridos ao longo do processo do seu percurso estudantil, assim como desenvolver um espírito crítico e de rigor face aos programas propostos e os conteúdos leccionados a nível do ensino básico e secundário. Ainda, conseguiu engajar o estudo de pirâmides, nos conteúdos programados, de acordo com as orientações propostas na reforma educativa que se pretende implementar brevemente.

Mesmo tendo alguns constrangimentos, principalmente a falta de documentos que aprofundassem esse tema, fizemos um esforço para apresentar de forma clara, lógica e cuidada todas as informações e conteúdos que achamos pertinentes para um bom estudo sobre as pirâmides.

Gostaríamos de realçar que este tema está longe de se esgotar, por isso, numa outra ocasião a formanda gostaria de alargar esse trabalho estudando as secções de uma forma detalhada, sombras de pirâmides e sombras de segmentos de rectas e rectas sobre as pirâmides, assim como realizar uma actividade de campo a volta desse sólido.

Esperamos ter alcançado os objectivos propostos, despertado interesse para o estudo desse sólido e fomentado reflexão sobre as práticas pedagógicas utilizadas no estudo desse tema. Ainda, esperamos que este trabalho venha a servir como um importante instrumento de pesquisa para todos aqueles que queiram aprofundar os seus conhecimentos sobre as pirâmides e sirva de auxílio para todos que venham a leccionar essa matéria.

BIBLIOGRAFIA

ABRANTES, Paulo e **CARVALHO**, Raul Fernando. (1991-3ªedição). *O Novo M9*. Lisboa: TEXTO EDITORA.

D'EÇA, Natália Almeida. **CASSIO**, Gouveia, **COSTA**, Azevedo. **GOMES**, Veloso. (1970-6ª Edição). *Vamos estudar matemática* – ciclo preparatório do ensino secundário 2º ano.

CARVALHO, Raul Fernando. (1996-1ª Edição) *Matemática – Tronco Comum 7º*.Editor, Ministério da Educação, Ciência e Cultura. Porto: Porto Editora, Lda.

CARVALHO, Raul Fernando. (1996-1ª Edição) *Matemática tronco comum 8º*. Editor, Ministério da Educação da República de Cabo Verde.

DORE, Jean Philippe.(). *Mathématiques 2 de NOUVEAU FRACTALE*. Paris : Michèle Miollany

FERNANDES, António de Nascimento Palma. (1ª Edição). *Elementos da Geometria*. Lisboa: Plátano SARL.

GOMES, Francilino. (2ª Edição*). Nove Mat*. Livraria Popular, LDA.

FILIPE, Leonor e **VAZ**, Natália. (). *Matemática 1º ano*, República de Cabo Verde. Editor, Ministério da educação e do desporto.

FILIPE, Leonor. **VAZ**, Natália (Fundação Calouste Gulbenkian). **TAVARES**, Cármen (Fundação Calouste Gulbenkian). **FERNANDES**, Teresa em colaboração com SPENCER, Filomena. (2001). *Matemática 3º ano*. Ministério da educação e do desporto. Lisboa: EUROPRESS Editores, Lda.

NEVES, Maria Augusta Ferreira e **BRITO**, Maria Luísa Carvalho. (1996-1ª Edição). *Matemática 9º ano*. Livro de Texto. Porto Editora.

NEVES, Maria Augusta Ferreira e **FARIA**, Maria Luísa Monteiro. (). *Matemática 9º ano*. Porto Editora.

OLIVEIRA, A. J. Franco. (Março 1995). *GEOMETRIA EUCLIDIANA*. Lisboa: Edições Universidade Aberta.

OLIVEIRA, A. J. Franco. (Setembrro1997). *TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS*. Lisboa: Edições Universidade Aberta.

SANTA-RITA, José Fernando. (2003-2ª Edição). *GEOMETRIA DESCRITIVA A-12ºANO*. Lisboa: Texto Editora, LDA.

SPENCER, Filomena, **FILIPE**, Leonor e **VAZ**, Natália. (). *Matemática 2º ano*. Porto Editora, LDA.

SPENCER, Filomena, **FILIPE**, Leonor e **VAZ**, Natália. (). *Matemática 4º ano*. PORTO EDITORA, LDA.

SPENCER, Filomena, **FILIPE**, Leonor e **VAZ**, Natália. (1996-2ª Edição). *Matemática 5º ano*. Lisboa: EUROPRESS Editores, Lda.

SPENCER, Filomena, **FILIPE**, Leonor e **VAZ**, Natália. (2001). *Matemática 6º ano – pirâmides de Idades Ensino Básico*. Lisboa: EUROPRESS Editores, Lda.

Coordenadores de Matemática. Relatório ENCONTRO NACIONAL DE MATEMÁTICA. (Dias 19,20 e 21de Setembro de 2005). Liceu Domingos Ramos.

Fundação Calouste Gulbenkian. *PROGRAMA DE MATEMÁTICA ENSINO SECUNDÁRIO, 3º CICLO*, República de Cabo Verde. Plano de organização do Ensino – Aprendizagem.

Ministério de Educação e Desporto. *Programas das áreas de Matemática, Ciências integradas e Expressões*, República de Cabo Verde: Organização curricular do Ensino Básico.

Ministério de Educação e Desporto. *Matemática 6º ano – Guia do professor*, República de Cabo Verde.

Ministério da Educação Ciência e Cultura e Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário. Programa da disciplina de *MATEMÁTICA 2º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO, 9º E 10ºANOS*, República de Cabo Verde.

Programa da disciplina de *MATEMÁTICA – 1º Ciclo 7º E 8º ANOS*.

Lei de bases do sistema educativo, Lei nº 103/III/90 de 29 de Dezembro

Http://pt.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A2mide_eg%C3%ADpcia

Http://pt.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A2mides_de_Giz%C3%A9

Http://www.geocities.com/CollegePark/Den/9002/Egipto.htm

Http://www.geocities.com/tioisma2002/index.html

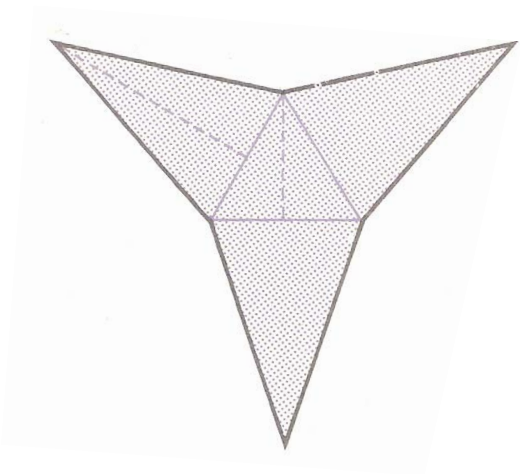
Http://www.antropos.galeon.com/html/piramides.htm

Http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/calpiramide.html

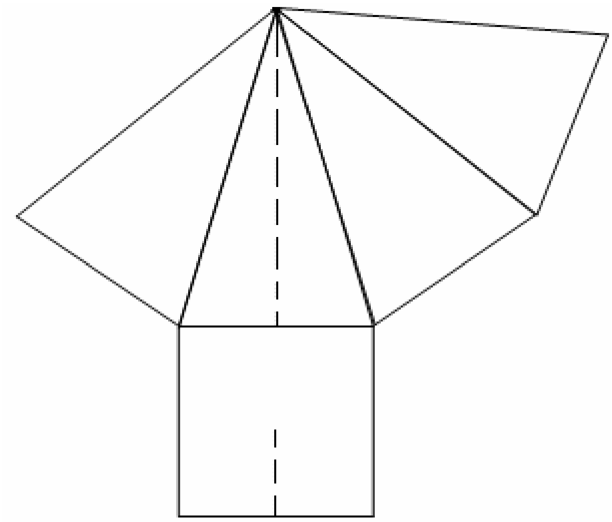
Anexos

PLANIFICAÇÃO DE ALGUMAS PIRÂMIDES

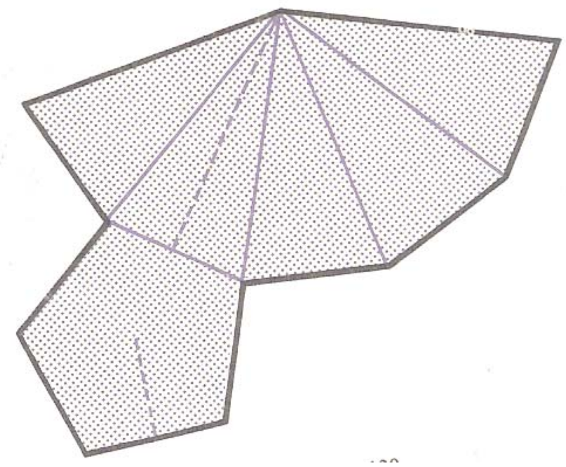
Planificação de uma pirâmide triangular



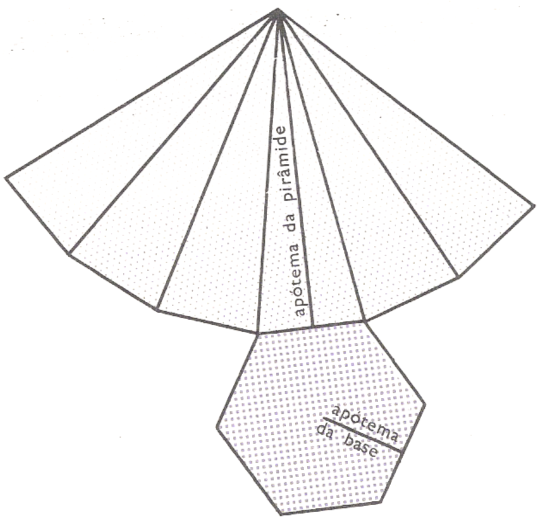
Planificação de uma pirâmide quadrangular



Planificação de uma pirâmide pentagonal



Planificação de uma pirâmide hexagonal



PROPOSTA DE CORRECÇÃO DE ALGUMAS ACTIVIDADES, SEGUNDO APC

Actividade1

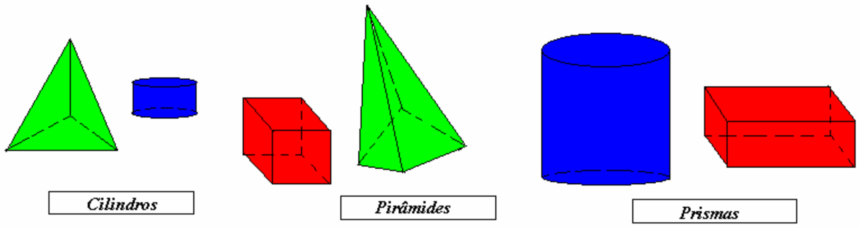


Fig.1

1.1 Agrupa os sólidos que possuem a mesma cor.

1.2 Indica o nome das cores apresentadas.

1.3 Coloca junto a cada grupo o respectivo nome.

Actividade 2

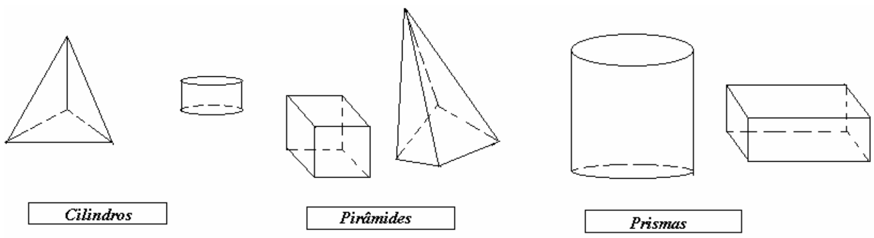


Fig.2

Pinta com mesma cor os sólidos que se assemelham, indica o nome das cores que utilizastes e corresponde cada grupo de sólidos o respectivo nome.

Actividade 3

Pinta as pirâmides com a cor verde, cilindros a azul e prismas a vermelho.

Actividade 4

Ajuda a Maria.

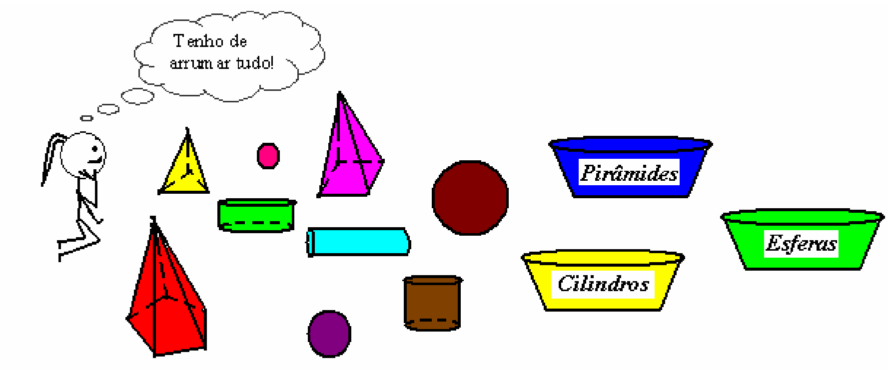


Fig.3

Actividade 5

Compara.

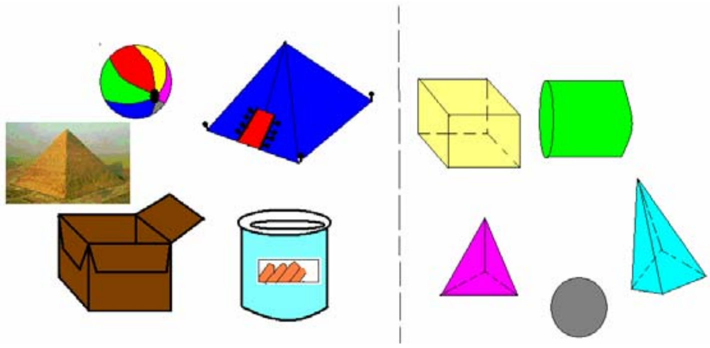


Fig.4

Avaliar é uma tarefa complexa que implica recolha de informação, juízo de valores e tomada de decisão, que normalmente se manifesta numa classificação. Por isso, o professor deve dispor de critérios de avaliação, que lhe permite avaliar cada aluno de acordo com os objectivos traçados e não pela comparação, evitando que um aluno ou outro fique prejudicado ou beneficiado durante esse processo.

É importante que cada critério seja independente, de modo que o aluno não seja penalizado ou beneficiado num mesmo item várias vezes.

É nesse âmbito que propomos uma metodologia de correcção para as actividades 7,9 e 10, propondo, por exemplo, 10 valores de cotação para cada actividade.

Com essa metodologia torna-se mais fácil para o professor identificar as lacunas do aluno, assim como orientar-lhe de forma a superar as suas dificuldades.

Actividade 7 – As férias

A mãe da Maria quer confeccionar um chapéu de praia, para evitar que a filha apanhe insolação durante as férias do verão.

A Maria quer participar na confecção do chapéu, por isso deu as seguintes instruções à mãe: “Quero que o meu chapéu tenha forma piramidal e que seja constituído por seis triângulos isósceles geometricamente iguais, que medem 30 cm de comprimento e 50 cm de altura”.

Ela parou para pensar sobre a quantidade de fazenda em, m^2, que seria necessária.

Ajuda-a.

Critérios / Instruções	Interpretação correcta do enunciado	Utilização correcta de fórmulas	Coerência na resposta
1	Recebe valor se, identificar o chapéu com a superfície lateral de uma pirâmide hexagonal. 1.5 V	Recebe valor se, sabe a fórmula para determinar a área do triângulo, $A_f = A_\triangle = \frac{1}{2} l.r$. 1 V	Recebe valor se, aplica correctamente a fórmula para determinar a área lateral de uma pirâmide regular. 1 V
2	Recebe valor se, capitar que o chapéu corresponde a superfície lateral de uma pirâmide regular. 1.5 V	Recebe valor se, sabe a fórmula para determinar a área lateral de uma pirâmide regular. $A_l = 3l \bullet r$ 2 V	Recebe ponto se, apresenta a resposta no final da actividade. 0.5V
3	Recebe valor se, relaciona a quantidade de fazenda com a área da pirâmide. 2 V	Recebe valor se, sabe fazer redução. $10000cm^2=1m^2$ 0.5V	
Total	5 V	3.5 V	1.5 V

Actividade 8 – 1ª fase

Cada grupo deve construir uma pirâmide e um prisma que tenham bases geometricamente iguais e mesma altura.

Actividade 8 – 2ª fase

Cada grupo deve encher o prisma confeccionado com um produto (areia, por exemplo) utilizando a respectiva pirâmide. De seguida tira uma conclusão e apresenta-a à turma.

O professor deve orientar a turma de forma que os alunos consigam ver que o volume do prisma é encontrado a partir do produto entre a área da base do prisma e a sua altura e concluam que o volume da pirâmide é dado por um terço do volume do Prisma.

Actividade 9 – Viagem ao Egipto

Thales de Mileto foi um dos matemáticos que ficou maravilhando com a complexidade e beleza das pirâmides, podendo deslumbrar-se com o reflexo das pedras que as revestiam.

Na sua viagem ao Egipto descobriu um processo que permite determinar a altura dessas famosas estruturas monumentais, utilizando a semelhança de triângulos.

As três grandes pirâmides foram construídas como tumbas reais para os reis Kufu, Quéfren, e Menkaure – pai, filho e neto. A maior delas, designada por grande pirâmide, tem base quadrangular com 230 *m* de comprimento.

Considerando as figuras que se seguem, responde com clareza as questões que te são apresentadas.

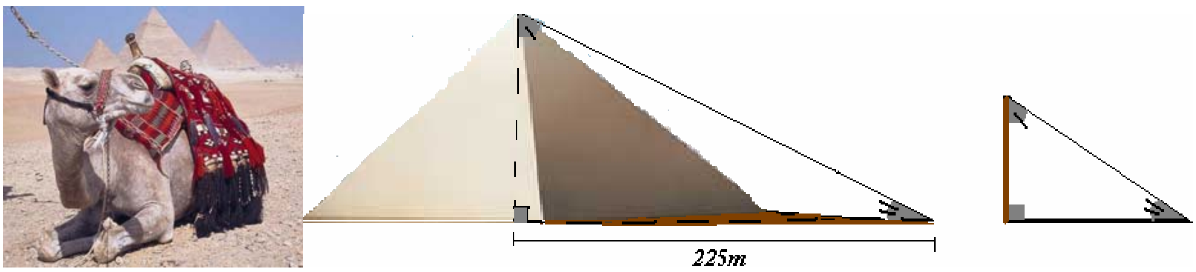


Fig.5

1. Situa o Egipto geograficamente.
2. Fala sobre a importância que o animal apresentado na figura tem, para esse país.
3. Fala resumidamente, sobre a contribuição dos egípcios para a Matemática.
4. Determina a porção do terreno que foi necessária para edificar esta pirâmide.
5. Determina o perímetro da base dessa pirâmide.
6. Determina a área da pirâmide que foi pavimentada com pedras “ luminosas”.
7. Qual é a altura da pirâmide, em *m*, sabendo que num dado momento a sombra de uma vara de 100*cm* mede 150*cm* e a sombra da pirâmide a partir do centro mede 225*m*.
8. Querendo construir um recipiente com forma piramidal com mesmas medidas apresentadas, para preservar cereais, qual será o seu volume?

Critérios / Instruções	Interpretação correcta do enunciado	Utilização correcta de fórmulas	Coerência na resposta
1	Recebe valor se, tem um pouco de cultura geral sobre Egipto, respondendo de forma acertada pelo menos duas questões de 1-3. 2 V	Recebe valor se, sabe as fórmulas para responder as questões 4,5,6 e 8. $A_B = A_\square = l^2, p = p_\square = 4\times l$ $A_l = 2\bullet l\bullet r, V_P = \frac{l^2}{3}\times h$ 2.5 V	Recebe valor se, aplica as fórmulas correctamente. 1 V
2	Recebe valor se, relaciona a porção do terreno com a área da base, quadrangular, regular, da pirâmide. 0.5V	Recebe valor se, aplica a razão de semelhança para determinar a altura da pirâmide. Se $[ABC]\sim[A'B'C']$ então, $\frac{[AB]}{[A'B']}=\frac{[AC]}{[A'C']}=\frac{[BC]}{[B'C']}$. 1 V	Recebe valor se, apresentar a resposta para cada questão.
3	Recebe valor se, relaciona o problema com problemas que envolvem semelhança de triângulos. 2 V	Recebe valor se, faz redução de cm a m de forma correcta. 100cm=1m. 0.5	0.5
Total	4.5 V	4 V	1.5 V

<u>**Actividade 10 –A capela**</u>

Uma capela possui uma pequena torre na parte lateral, essa torre é formada por figuras que se assemelham a três sólidos geométricos como mostra a Fig. 6.

Sabendo que: o sino se encontra a uma altura de 7m, a aresta do sólido que possui a forma de um cubo mede 2m, a cruz encontra-se afixada a uma altura de 8m, a aresta da base do prisma mede 3/2 da aresta do cubo e a aresta da base da pirâmide quadrangular regular mede 1/3 da aresta da base do prisma.

1. Determina:

1.1 A altura e o volume da pirâmide.

1.2 A medida da aresta lateral da pirâmide.

1.3 A quantidade de telha necessária para pavimentar a superfície da pirâmide, tendo em conta que cada telha mede 30 cm de comprimento e 10 cm de largura.

1.4 O valor aproximado da área lateral da torre, tendo em conta que a parábola descrita tem como vértice o ponto médio da aresta e existe na face dianteira e retaguarda do "cubo".

1.5 A quantidade de tinta azul, em kg, gasta para pintar a torre, sabendo que foi utilizada 125g de tinta por cada metro quadrado.

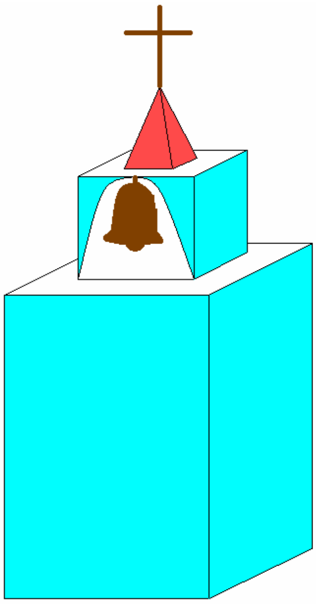


Fig6

Critérios / Instruções	Interpretação correcta do enunciado	Utilização correcta de fórmulas	Coerência na resposta
1	Recebe valor se, interpreta o texto para extrair outros dados, entre eles a altura. 1.5V	Recebe valor se aplica teorema de Pitágoras na questão 1.2 1V	Recebe valor se, faz redução de cm a m de e de g a kg para dar as respostas. 0.5V
2	Recebe valor se, relaciona a quantidade de telha com a área lateral da pirâmide. 1V	Recebe valor se, sabe aplicar as fórmulas: $A_{\square} = l^2, A_{\square} = c \bullet l$ $A_{\triangle} = \frac{1}{2} l.r, A_l = n \bullet A_f$ $V_P = \frac{l^2}{3} \bullet h$ 2V	Recebe valor se, para encontrar a área lateral total da torre soma as áreas laterais de cada sólido. 1V
3	Recebe valor se, relaciona a quantidade de tinta com a área lateral total, da parte da torre. 1.5V	Se aproxima a área da parte dianteira do "cubo" a área de 2 triângulos congruentes. 1.5V	
Total	4 V	4.5 V	1.5 V

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. A base duma pirâmide é um rectângulo de lados 6cm e 8cm. Cada aresta lateral da pirâmide mede 13cm. Calcular a altura da pirâmide.

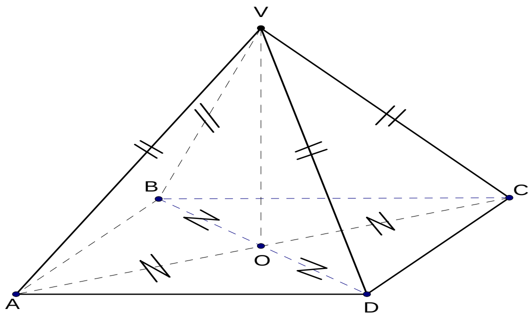


Fig.1
$[ABCD]$ -um rectângulo.

Resolução

Para o cálculo da altura precisa-se saber onde se situa a projecção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base.

Uma vez que todas as arestas laterais são iguais, os vértices da base são equidistantes da projecção ortogonal do vértice da pirâmide, isto é, $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$. O que significa que projecção do vértice da pirâmide é o centro da circunferência, circunscrita a volta da base, isto é, é o ponto da intersecção de diagonais do rectângulo.

De $[VOC]: \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, mas $\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (cm), então $\overline{OC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ (cm), logo $\overline{VO} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm).

OBS: Note-se, que as oblíquas iguais, traçadas de um ponto comum ao mesmo plano, têm as projecções iguais, e inversamente.

2. A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles, uma aresta da base é igual a 12 cm e as outras duas iguais a 10cm. As faces laterais constituem com a base os ângulos diedros iguais de 45º. Calcular a altura da pirâmide.

Resolução

Nesse problema o vértice da pirâmide é equidistante não dos vértices da base, mas dos seus lados. Esse facto será formulado e demonstrado no caso geral: se duas faces laterais de pirâmide constituem com a base ângulos diedros iguais, então o vértice da pirâmide é equidistante dos lados da base, que pertencem a essas faces laterais.

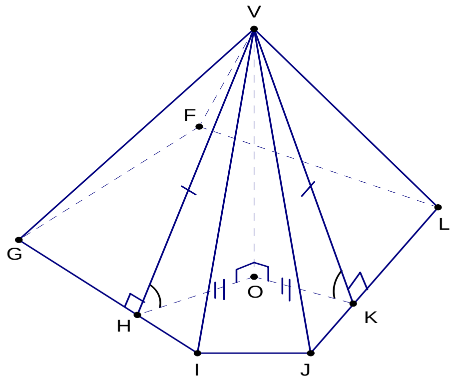


Fig.2

$\left[VOH\right]=\left[VOK\right]$ são triângulos rectângulos $\left(V\hat{O}H = K\hat{O}V = 90^\circ\right)$, pelo cateto comum $\left[VO\right]$ e ângulos iguais $\measuredangle OHV = \measuredangle VKO$ (dados) vem que $\overline{OH} = \overline{OK}$,isto é, a projecção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base é o centro da circunferência inscrita na base da pirâmide. Também se concluiu que $\left[VH\right]=\left[VK\right]$, isto é, o vértice é equidistante dos lados da base da pirâmide.

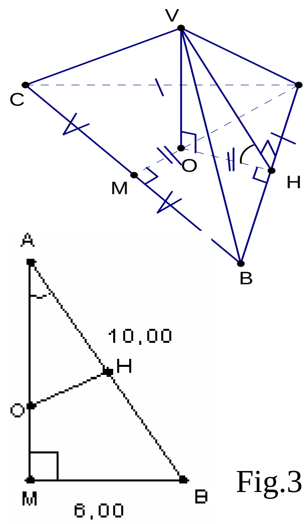


Fig.3

$V\widehat{H}O = 45^{\circ}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = 10cm \Rightarrow \left[AM\right] \rightarrow$ mediana e altitude de $\triangle ABC$

$\overline{BC} = 12cm$

$O \in \left[AM\right]$, $\left[HV\right] \perp \left[AB\right]$ (pela construção do diedro)

$\left[VOH\right]$ - é um triângulo rectângulo

$V\widehat{H}O$=45º

$h = \overline{VO} = \overline{OH}$, $\left[OH\right]$ – raio da circunferência inscrita no $\left[ABC\right]$

Pela fórmula do Heron[17] tem-se:

$$p \cdot \overline{OH} = S_{ABC} = \frac{1}{2}(10+10+12)\cdot \overline{OH} = 16 \cdot \overline{OH}$$

$$p \cdot \overline{OH} = S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48$$

Daí, $16 \cdot \overline{OH} = 48 \Leftrightarrow \overline{OH} = 3(cm)$ como $\overline{VO} = \overline{OH} = 3(cm)$ então $\overline{VO} = 3(cm)$.

---

[17]**Teorema (Fórmula de Heron)**

Sejam a,b,c comprimentos dos lados de um triângulo [ABC], designemos por $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, o semi perímetro de [ABC], $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

De outra forma, considerando que os triângulos $[AOH]$ e $[AMB]$ são semelhantes, tem-se:

$$\left(\frac{\overline{OH}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{OH}}{\frac{1}{2}\overline{CB}}=\frac{\overline{OH}}{6}\right)=\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AM}-\overline{OH}}{10}=\frac{\sqrt{100-36}-\overline{OH}}{10}=\frac{8-\overline{OH}}{10}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\overline{OH}}{6}=\frac{8-\overline{OH}}{10}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\overline{OH}=6\left(8-\overline{OH}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\overline{OH}=3\left(8-\overline{OH}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24-3\overline{OH}-5\overline{OH}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8\overline{OH}=-24\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH}=3(cm)\Leftrightarrow\overline{VO}=3(cm)$$

3. Uma pirâmide triangular regular tem 15m de aresta lateral e o perímetro da circunferência circunscrita[18] à base (p) é 56.52m, determinar a altura dessa pirâmide.

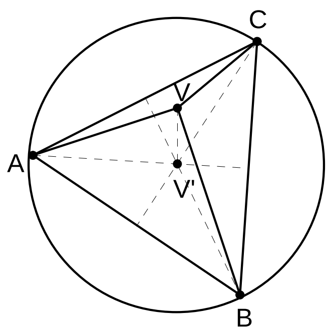


Fig.4

Resolução

Seja a pirâmide triangular regular $[VABC]$, as mediatrizes das arestas da base encontram-se num ponto que é o cento da circunferência circunscrita a esse triângulo[19].

Sabemos que $p=2\pi r\Rightarrow 56.52m=2\cdot 3.14r\Leftrightarrow r=9m$.

O segmento de recta $[VV']$ é a altitude da pirâmide, por isso, é perpendicular ao raio da circunferência $[AV']$. Assim o triângulo $[VV'A]$ é rectângulo em V', $\overline{AV}=15m$ e

[18] Uma circunferência está circunscrita a um triângulo se os vértices desse polígono pertencem à circunferência.
[19] A esse ponto chama-se circuncentro.

$\overline{AV'} = 9m$, pelo teorema de Pitágoras segue que $\overline{VV'} = \sqrt{\overline{AV}^2 - \overline{AV'}^2} \Leftrightarrow \overline{VV'} = \sqrt{15^2 - 9^2} \Leftrightarrow \overline{VV'} \simeq 12m$.

4.A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 8 cm e a altura 10 cm. Qual é a área lateral?

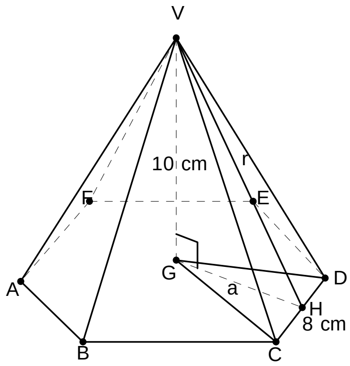


Fig.5

Resolução

Sabendo que cada aresta da base mede 8cm, então *p*=48cm.

Para encontrar a medida do apótema da pirâmide (*r*), será considerado $[VGH]$ rectângulo em G, mas antes será procurado o valor da apótema da base (*a*).

Considerando o triângulo isósceles $[CGD]$ e sabendo que o ângulo ao centro correspondente ao lado do pentágono mede 60º de amplitude e sabendo que $[GH]$ é mediatriz do segmento $[CD]$ e bissectriz do $\sphericalangle CGD$ vem:

$[GHD]$ é rectângulo em H e $H\hat{G}D = 30º$, assim $tg30º = \frac{\overline{HD}}{a} \Leftrightarrow a \simeq 6.7cm$.

Pelo teorema de Pitágoras[20] vem:

$$r^2 = a^2 + (10cm)^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{(6.7cm)^2 + 100cm^2}$$
$$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{144.9cm^2}$$
$$\Leftrightarrow r \simeq 12cm$$

Aplicando a fórmula vem: $A_l = 288cm^2$.

[20] Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

5. Qual é a área total de uma pirâmide pentagonal regular? Sabendo que a aresta da base mede 5cm e a altura 6cm.

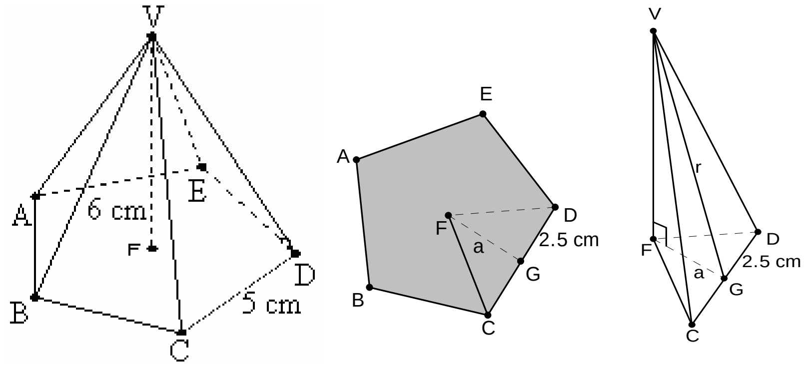


Fig.6

Resolução

Consideremos o triângulo isósceles $[CFD]$, o ângulo ao centro correspondente ao lado do pentágono é tal que $C\widehat{F}D = 72^{\circ}$. Sendo *a* mediatriz do segmento $[CD]$ e bissectriz do $\measuredangle CFD$, segue que $G\widehat{F}D = 36^{\circ}$.

Levando em consideração o triângulo rectângulo $[GFD]$ tem-se que $tg36^{\circ} = \frac{\overline{GD}}{a} \Leftrightarrow a \simeq 3.44cm$. Pelo teorema de Pitágoras vem: $r^2 = a^2 + (6cm)^2 \Leftrightarrow r \simeq 6.9cm$. Assim $A_l = 86.25cm^2$, então a área total que e dada pela fórmula $A_t = \frac{p}{2} \bullet (r + a)$ será aproximadamente igual a 129.25 cm^2.

6. As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular formam ângulos de 60 graus com a base e as arestas da base medem 18 cm. Qual é a área total da pirâmide?

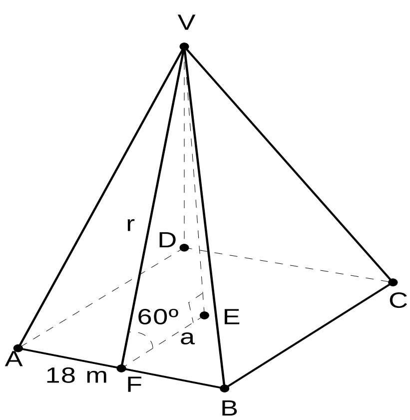


Fig.3

Resolução

Como a pirâmide quadrangular $[VABCD]$ é regular, a perpendicular ao plano da base tirada pelo vértice da pirâmide intersecta a base no seu centro. O comprimento da apótema da base é igual a metade do comprimento da aresta da base, isto é $a=9m$.

Para determinar o valor de r, apótema da pirâmide, será considerado o triângulo rectângulo $[VEF]$, $\cos 60^o = \frac{9cm}{r} \Leftrightarrow r = 18cm$. Como $p = 4\times 18m = 72m$ vem que $A_t = \frac{72cm}{2} \bullet (18cm + 9cm) = 972cm^2$.

7.Uma pirâmide tem 9cm de altura e volume igual a 108cm³. Sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 3cm, qual é o volume do tronco desta pirâmide, obtido pelo corte desta pirâmide por um plano paralelo à base da mesma?

Resolução

De acordo com os dados obtém-se: $V_P = \frac{1}{3} A_B \bullet h \Leftrightarrow 108cm^3 = \frac{1}{3} A_B \bullet 9cm \Leftrightarrow A_B = 36cm^2$.

Uma vez que a altura do tronco (h'') é 3cm, segue que a altura da pirâmide menor (h') é 6cm. Aplicando o 2º corolário do teorema 2, $\frac{A_B}{A_B'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$, obtém-se: $\frac{36cm^2}{A_B'} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow A_B' = 16cm^2$.

Determinando o volume da pirâmide menor, $V_P' = \frac{1}{3} A_B' \bullet h'$, tem-se: $V_T = V_P - V_P' = 76cm^3$.

8. A base de uma pirâmide é um triângulo regular, uma das suas faces laterais é perpendicular à base e duas outras formam com a base ângulos iguais a α. Que ângulos formam as arestas laterais com o plano da base?

Resolução

Seja $[VABC]$ uma pirâmide e a face $[VBC]$ perpendicular à base $[ABC]$, as faces $[VAB]$ e $[VAC]$ constituem com a base os ângulos iguais a α (Fig.7).

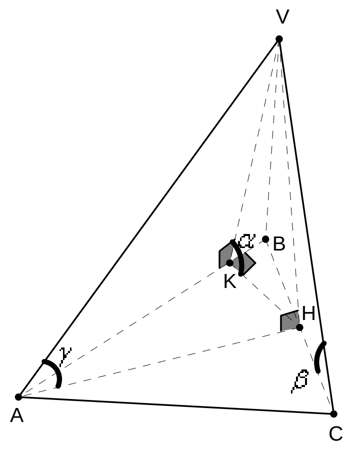


Fig.7

Baixa-se do ponto V a perpendicular $[VH]$ sobre a recta BC. Sendo que o plano (VBC) é perpendicular ao plano da base, então $[VH]$ é perpendicular ao plano da base da pirâmide, consequentemente é a altitude da pirâmide.

Da igualdade de diedros, obtidos pela intersecção dos planos (VAB) e (VAC) com o plano da base, segue-se que o ponto H é equidistante dos lados $[AB]$ e $[AC]$ da base, por isso, pertence à bissectriz do $\measuredangle CAB$, o que significa que esse ponto H é ponto meio do segmento $[BC]$.

Sejam $\measuredangle HAV = \gamma$ e $\measuredangle VCH = \beta$ os ângulos procurados, onde γ é o ângulo do triângulo rectângulo $[VAH]$ e β é o ângulo do triângulo rectângulo $[VCH]$. Designando $\overline{BH} = \overline{HC} = m$ e exprimindo os catetos $[AH]$ e $[VH]$ desses triângulos através de m.

Do triângulo $[ABH]$ tem-se que $\overline{AH} = \overline{BH} \bullet tg60^{o} = m\sqrt{3}$. De seguida, construindo o segmento $[VK] \perp [AB]$, obtém-se o rectilíneo do diedro $\measuredangle HKV = \alpha$ (pela condição dada).

Do triângulo $[BKH]$ e do triângulo $[VKH]$ vem: $\overline{KH} = \overline{BH} \bullet \sin 60^{o}, \overline{VH} = \overline{KH} \bullet tg\alpha \Leftrightarrow \overline{VH} = m\frac{\sqrt{3}}{2} \bullet tg\alpha$, donde

$$tg\beta = tg\left(V\hat{C}H\right) = \frac{\overline{VH}}{\overline{HC}} = \frac{\cancel{m}\sqrt{3}tg\alpha}{2\cancel{m}} = \frac{\sqrt{3}}{2}tg\alpha \Leftrightarrow \beta = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}tg\alpha\right)$$ e

$$tg\gamma = tg\left(H\hat{A}V\right) = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}} = \frac{\cancel{m\sqrt{3}}}{2}tg\alpha \bullet \frac{1}{\cancel{m\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}tg\alpha \Leftrightarrow \gamma = arctg\left(\frac{1}{2}tg\alpha\right).$$

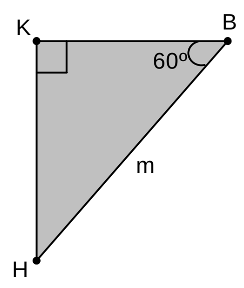


Fig.8

EXERCÍCIOS PROPOSTOS.

1. Sabe-se que uma pirâmide quadrangular regular tem de perímetro da base 84cm e de altura 14cm, determinar a medida da sua apótema.

2. Determinar o perímetro da base de uma pirâmide quadrangular recta, de volume igual a $30m^3$, sabendo que a base é um rectângulo, a altura da pirâmide é 5m e uma das arestas da base é dupla da outra.

3.Uma pirâmide quadrangular regular tem 6cm de aresta da base e 4cm de apótema. Qual é a sua área lateral?

4.Um grupo de escuteiros quer obter a área total das suas barracas que têm forma piramidal quadrangular regular; para isso, eles usam cada dois passos de um escoteiro como correspondente a 1 metro. A barraca tem 4 passos de lado da base e 2 passos de apótema. Qual é a área da base, área lateral e a área total.

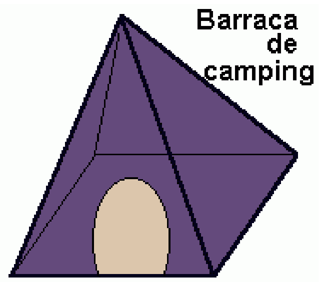


Fig.1

5. A Carla tem um perfume contido em um frasco que tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular. A curiosa Carla quer saber o volume de perfume que o frasco contém. Ela usou uma régua e tirou duas informações: a medida da aresta da base é 4cm e a medida da aresta lateral de 6cm.

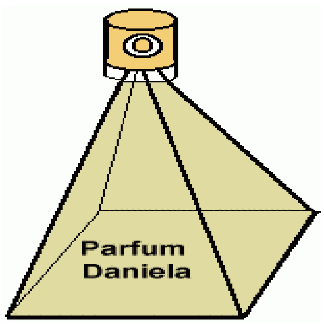


Fig.2

6.Determinar o volume de uma pirâmide triangular regular cuja base está inscrita numa circunferência de comprimento igual a 6.28m e cuja aresta lateral mede 2m.

7.Um bule tem a forma de um tronco de pirâmide quadrangular. Este tronco foi obtido a partir de uma pirâmide quadrangular fazendo uma corte paralelo á base, conforme ilustrado.

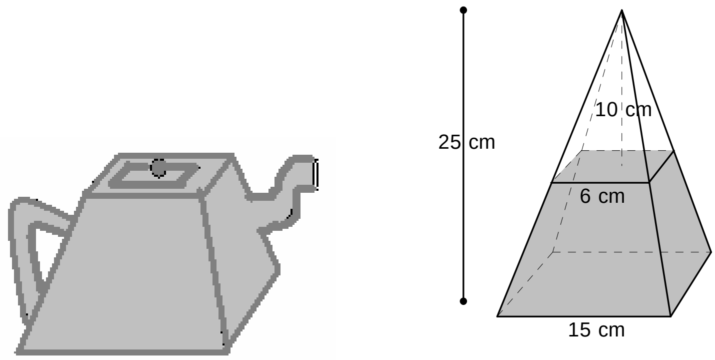


Fig.3

Qual é a capacidade do bule?

8.A área da secção feita por um plano paralelo à base de uma pirâmide quadrangular regular é igual a 1.96m^2. Sabendo que a altura da pirâmide é 12m e que a secção feita dista de 3m da base, determinar o volume da pirâmide.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. $r = 17.5cm$
2. $p = 18m$
3. $A_l = 48cm^2$
4. $A_B = 4m^2, A_l = 4m^2, A_t = 8m^2$
5. $V_P = \frac{32}{3}\sqrt{7}cm^3$
6. $V_P = 0.75m^3$
7. $C_{Bule} = 1755cm^3$
8. $V_P \simeq 13.76m^3$